

PISA 2021

**KONCEPTUALNI OKVIR MATEMATIČKE
PISMENOSTI (radna verzija, studeni 2018.)**

Zagreb, svibanj 2021.

PISA 2021 – Konceptualni okvir matematičke pismenosti (radna verzija, studeni 2018.)



Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja

Zagreb, svibanj 2021.



Nacionalni centar
za vanjsko vrednovanje
obrazovanja

NAKLADNIK:

Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja

ZA NAKLADNIKA:

Ivana Katavić

PREVODITELJ:

Emanuel Maloča

LEKTORICA:

Dubravka Volenec

UREDNIKA:

Ana Markočić Dekanić

GRAFIČKI UREDNIK:

Zoran Žitnik

Ovaj tekst izvorno je objavila na engleskom jeziku Organizacija za ekonomsku suradnju i razvoj (OECD) 2018. godine pod naslovom: PISA 2021 Mathematics Framework (Draft), OECD, 2018, <https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>

Ovaj prijevod nije izradio OECD i ne bi se trebao smatrati službenim prijevodom OECD-a. Za kvalitetu prijevoda i njegovu usklađenost s izvornim tekstom isključivo je odgovoran autor ili autori prijevoda. U slučaju bilo kakvih neslaganja između izvornog teksta i prijevoda, samo će se izvorni tekst smatrati valjanim.



Ova publikacija distribuira se pod uvjetima međunarodne Creative Commons autorskopravne licence (Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 IGO - CC BY-NC-SA 3.0 IGO, <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/igo/>) kojom se dozvoljava svaka nekomercijalna uporaba, umnažanje, redistribucija i prilagodba u bilo kojem mediju ili formatu bez daljnjih ograničenja sve dok se na primjeren način daje zasluga autoru/autorima i izvoru/izvorima, dok se navode poveznice na Creative Commons licencu, dok se navodi koje su izmjene napravljene te dok se izmijenjeno ili prilagođeno djelo dijeli pod istim uvjetima.

SADRŽAJ

| | |
|---|-----------|
| UVOD | 4 |
| DEFINIRANJE MATEMATIČKE PISMENOSTI | 7 |
| Ideja matematički pismenog pojedinca u istraživanju PISA 2021 _____ | 9 |
| Izravna povezanost s različitim kontekstima problema u istraživanju PISA 2021 _____ | 12 |
| Važna uloga matematičkih alata i tehnologije u istraživanju PISA 2021 _____ | 12 |
| ORGANIZACIJA PODRUČJA | 13 |
| Matematičko zaključivanje i procesi rješavanja problema _____ | 13 |
| Matematičko sadržajno znanje _____ | 21 |
| Konteksti zadataka i odabrane vještine 21. stoljeća _____ | 26 |
| ISPITIVANJE MATEMATIČKE PISMENOSTI | 30 |
| Struktura ispitivanja matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 _____ | 30 |
| Poželjna distribucija bodova prema matematičkom zaključivanju i procesima rješavanja problema _____ | 30 |
| Poželjna distribucija bodova prema sadržajnim kategorijama _____ | 31 |
| Težina zadataka _____ | 31 |
| Ispitivanje matematičke pismenosti putem računala _____ | 34 |
| Dizajn matematičkih zadataka u istraživanju PISA 2021 _____ | 35 |
| Bodovanje zadataka _____ | 36 |
| Izješćivanje o postignućima u matematici _____ | 36 |
| Matematička pismenost i popratni upitnici _____ | 37 |
| SAŽETAK | 40 |
| LITERATURA | 41 |

POPIS TABLICA

| | | |
|------------|--|----|
| Tablica 1. | Približna distribucija bodova po područjima u istraživanju PISA 2021 _____ | 30 |
| Tablica 2. | Približna distribucija bodova prema sadržajnim kategorijama u istraživanju PISA 2021 _____ | 31 |
| Tablica 3. | Očekivani postupci učenika za matematičko zaključivanje i svaki od procesa rješavanja problema _____ | 32 |

POPIS PRIKAZA

| | | |
|-----------|---|----|
| Prikaz 1. | Matematička pismenost: odnos između matematičkog zaključivanja i ciklusa rješavanja problema (modeliranja) _____ | 9 |
| Prikaz 2. | PISA 2021: odnos između matematičkog zaključivanja, ciklusa rješavanja problema (modeliranja), matematičkih sadržaja, konteksta i odabranih vještina 21. stoljeća _____ | 10 |
| Prikaz 3. | Primjer alata za uređivanje u istraživanju PISA 2021 _____ | 36 |

UVOD

1. Ispitivanje matematičke pismenosti od velikog je značaja za istraživanje PISA 2021 s obzirom na to da je matematika ponovno glavno ispitno područje. Iako se matematička pismenost ispitivala u ciklusima PISA 2000, PISA 2003, PISA 2006, PISA 2009, PISA 2012, PISA 2015 i PISA 2018, samo je u ciklusima PISA 2003 i PISA 2012 bila glavno ispitno područje.
2. Ponovno ispitivanje matematičke pismenosti kao glavnog ispitnog područja u istraživanju PISA 2021 istovremeno pruža priliku za nastavak usporedbe postignuća učenika tijekom vremena, ali i reviziju onoga što bi se trebalo ispitivati s obzirom na promjene koje su se dogodile u svijetu u tom području te u obrazovnim politikama i praksama.
3. Svaka zemlja ima vlastitu viziju matematičke pismenosti i organizira obrazovanje kako bi se matematička pismenost postigla kao očekivani ishod. Matematička pismenost nekad je podrazumijevala izvođenje osnovnih aritmetičkih vještina ili operacija koje uključuju zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje cijelih brojeva, decimalnih brojeva i razlomaka; računanje postotaka; te izračunavanje površine i obujma jednostavnih geometrijskih oblika. U novije vrijeme koncept matematičke pismenosti i pripremljenosti pojedinaca za sudjelovanje u društvu kao brižni, angažirani i promišljajućí građani 21. stoljeća mijenja se zbog digitalizacije mnogih aspekata života, sveprisutnosti podataka u donošenju osobnih odluka koje se u početku odnose na obrazovanje i planiranje karijere, a kasnije tijekom života i na zdravlje i ulaganja, kao i zbog sve većih društvenih izazova u rješavanju problema poput klimatskih promjena, državnog duga, rasta stanovništva, širenja pandemijskih bolesti te globalizirane ekonomije.
4. Svi navedeni ključni problemi i drugi problemi s kojima se suočavaju društva diljem svijeta sadrže kvantitativnu komponentu. Za njihovo razumijevanje i rješavanje potrebna je, barem jednim dijelom, matematička pismenost i matematički način razmišljanja. Takav matematički način razmišljanja u sve kompleksnijim kontekstima ne potiče se reprodukcijom ranije spomenutih osnovnih računskih operacija, već zaključivanjem¹ (i deduktivnim i induktivnim). Shvaćanje matematičke pismenosti učenika treba stavljati veći naglasak na važnu ulogu zaključivanja. Ovaj konceptualni okvir pretpostavlja da matematička pismenost u 21. stoljeću, osim rješavanja problema, obuhvaća i matematičko zaključivanje te određene aspekte računalnog razmišljanja.
5. Zemlje se danas suočavaju s novim prilikama i izazovima u svim područjima života, od kojih su mnogi posljedica ubrzanog razvoja računala i uređaja poput robota, pametnih telefona i umreženih strojeva. Primjerice, za veliku većinu mladih i studenata koji su upisali fakultete nakon 2015. godine telefoni su ručni mobilni uređaji koji omogućuju dijeljenje glasa, teksta i slika te pristup internetu – mogućnosti koje su za većinu njihovih roditelja, a nesumnjivo i za sve njihove bake i djedove, bili znanstvena fantastika (Beloit College, 2017). Prepoznavanje sve većeg kontekstualnog diskontinuiteta između prošlog stoljeća i budućnosti potaklo je raspravu o razvoju vještina 21. stoljeća (Ananiadou i Claro, 2009; Fadel, Bialik i Trilling, 2015; National Research Council, 2012; Reimers i Chung, 2016).
6. Upravo zbog tog diskontinuiteta nameće se potreba za reformom obrazovanja i izazovi u njezinoj provedbi. Nastavnici, donositelji obrazovnih politika i drugi dionici s vremena na vrijeme revidiraju javne obrazovne standarde i politike. Tijekom takvih razmatranja dolazi se do novih ili revidiranih odgovora na dva općenita pitanja: 1) Što učenici trebaju učiti? te 2) Koji učenici trebaju što učiti? Najčešći argument u obrani matematičkog obrazovanja za sve učenike jest njegova korisnost u različitim praktičnim situacijama. Međutim, taj argument sam po sebi s vremenom slabi – mnoge se jednostavne aktivnosti automatiziraju. Da bi izračunali iznos koji je potrebno platiti, konobari u restoranima donedavno su množili i zbrajali na papiru. Danas samo trebaju pritisnuti tipke na ručnim

¹ U ovom konceptualnom okviru matematičko zaključivanje obuhvaća i matematičko (deduktivno) zaključivanje i statističko (induktivno) zaključivanje.

uređajima. Ljudi su donedavno planirali putovanja uz pomoć tiskanog reda vožnje, što je zahtijevalo dobro razumijevanje vremenske osi i nejednakosti te tumačenje kompleksnih dvosmjernih tablica. Danas taj podatak možemo jednostavno potražiti na internetu.

7. Što se tiče pitanja „što poučavati“, mnoga ograničena shvaćanja rezultat su načina na koji se promatra matematika. Mnogi ljudi vide matematiku samo kao korisni alat. Ovakav je pristup jasno vidljiv u školskim kurikulumima mnogih zemalja koji se ponekad svode na popis matematičkih tema ili postupaka, a podrazumijevaju uvježbavanje u predvidljivim (a često i ispitnim) situacijama. Takav je pogled na matematiku preuzak za današnji svijet jer zanemaruje ključna obilježja matematike koja postaju sve važnija. No bez obzira na to, sve veći broj zemalja stavlja naglasak na zaključivanje i važnost relevantnih konteksta u svojim kurikulumima. Te bi zemlje mogle poslužiti kao model drugima.

8. Konačno, odgovor na ova pitanja jest da bi svaki učenik trebao naučiti (i imati priliku naučiti) razmišljati na matematički način oslanjajući se na matematičko zaključivanje (i deduktivno i induktivno) zajedno s manjom skupinom temeljnih matematičkih koncepata na kojima se ono temelji, a koji se sami po sebi nužno eksplicitno ne poučavaju, već se manifestiraju i učvršćuju kroz učenje. Na taj se način učenici opremaju konceptualnim okvirom uz pomoć kojega će se nositi s kvantitativnim dimenzijama života u 21. stoljeću.

9. Svrha konceptualnog okvira istraživanja PISA 2021 jest učiniti relevantnost matematike jasnijom i eksplicitnijom za petnaestogodišnje učenike te osigurati da razvijeni zadaci budu smješteni u smislene i autentične kontekste. Ciklus matematičkog modeliranja, korišten u prethodnim konceptualnim okvirima (npr. OECD (2004; 2013) za opisivanje faza kroz koje pojedinci prolaze u rješavanju kontekstualiziranih problema, i dalje je ključno obilježje konceptualnog okvira u istraživanju PISA 2021. Njegova je svrha bolje definirati matematičke procese koje učenici primjenjuju u rješavanju problema – procese koji će zajedno s matematičkim zaključivanjem (i deduktivnim i induktivnim) biti glavne dimenzije prilikom izvješćivanja rezultata.

10. Glavna metoda ispitivanja matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 bit će rješavanje testa iz matematike na računalu. Međutim, za zemlje koje ne odluče testirati učenike na računalu bit će osigurani tiskani instrumenti. Konceptualni okvir revidiran je kako bi se odrazile promjene u načinu testiranja uvedene 2015. godine, uključujući i raspravu o čimbenicima o kojima valja voditi računa u razvoju digitalnih zadataka s obzirom na to da je riječ o prvom većem revidiranju matematičkog konceptualnog okvira od uvođenja računalnog testiranja u PISA-u.

11. Prilikom razvoja konceptualnog okvira za istraživanje PISA 2021 vodilo se računa o tome da OECD očekuje da će u PISA-i doći do povećanja broja zemalja sudionica s niskim i srednjim dohotkom. Konkretno, konceptualni okvir istraživanja PISA 2021 prepoznaje: potrebu za povećanjem razlučivosti na donjem kraju distribucije učeničkih postignuća oslanjajući se u razvoju istraživanja na konceptualni okvir istraživanja „PISA for Development“ (OECD, 2017); potrebu za proširivanjem razina postignuća na donjem kraju skale postignuća; važnost obuhvata šireg raspona socijalnih i ekonomskih kontekstualnih čimbenika; te očekivanje da će doći do uključivanja u istraživanje mladih u dobi od 14 do 16 godina izvan školskog sustava.

12. Konceptualni okvir istraživanja PISA 2021 vodi računa o sve većoj i promjenjivoj ulozi računala i računalnih alata u svakodnevnom životu i u kontekstima rješavanja matematičkih problema jer prepoznaje da bi učenici trebali posjedovati i biti sposobni primijeniti vještine računalnog razmišljanja u primjeni matematike prilikom rješavanja problema. Vještine računalnog razmišljanja obuhvaćaju prepoznavanje uzoraka, stvaranje i korištenje apstrakcije, dekompoziciju uzoraka, utvrđivanje koji bi se (ako postoje) računalni alati mogli koristiti u analiziranju ili rješavanju problema, te definiranje algoritama kao dijela složenijeg rješenja. Naglašavajući važnost računalnog razmišljanja u primjeni matematike, konceptualni okvir pretpostavlja da će i zemlje sudionice promišljati o ulozi računalnog razmišljanja u matematičkim kurikulumima i pedagoškim pristupima.

13. Konceptualni okvir matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 organiziran je u tri glavna odjeljka. Prvi odjeljak 'Definiranje matematičke pismenosti' pojašnjava teorijske osnove PISA-ina ispitivanja matematičke pismenosti, uključujući formalnu definiciju konstrukta *matematičke pismenosti*. Drugi odjeljak, 'Organizacija područja' opisuje četiri aspekta: a) matematičko zaključivanje i tri matematička *procesa* (ciklusa modeliranja/rješavanja problema); b) način na koji je matematičko *sadržajno* znanje organizirano u konceptualnom okviru istraživanja PISA 2021, te *sadržajno* znanje relevantno za petnaestogodišnje učenike; c) odnos između matematičke pismenosti i takozvanih *vještina 21. stoljeća*; te d) *kontekste* u kojima će se učenici susretati s matematičkim izazovima. Treći odjeljak 'Ispitivanje matematičke pismenosti' donosi strukturna pitanja vezana uz ispitivanje, uključujući dizajn testa i druge tehničke informacije.

14. Da bi se osiguralo praćenje trendova, većina zadataka u istraživanju PISA 2021 bit će zadaci koji su bili korišteni u prethodnim ciklusima istraživanja. Veća skupina objavljenih zadataka temeljenih na prijašnjem konceptualnom okviru dostupna je na adresi: <http://www.oecd.org/pisa/test>. U **Priilogu A** nalazi se sedam primjera zadataka uz pomoć kojih se nastoje opisati novi najvažniji elementi konceptualnog okvira istraživanja PISA 2021.

15. Konceptualni okvir istraživanja PISA 2021 razvijen je pod vodstvom stručne radne skupine za matematiku (MEG), tijela koje je imenovao PISA-in kontraktor za razvoj matematičkoga konceptualnog okvira (RTI International), u suradnji s PISA-inim Upravljačkim odborom (PGB). Stručna radna skupina za matematiku sastojala se od osam članova među kojima su bili matematičari, statističari, nastavnici matematike i stručnjaci za vrednovanje, tehnologiju i obrazovna istraživanja iz različitih zemalja. Stručna radna skupina za matematiku imala je dodatnu podršku proširene skupine za matematiku (eMEG), sastavljene od deset stručnjaka koji su imali ulogu recenzenata konceptualnog okvira koji je razvila stručna radna skupina za matematiku (MEG). Proširena skupina za matematiku (eMEG) bila je sastavljena od stručnjaka za različita matematička područja iz različitih zemalja. Dodatne recenzije proveli su i stručnjaci iz više od 80 zemalja koji predstavljaju svoju zemlju u PISA-inom Upravljačkom odboru. RTI International, angažiran od strane Organizacije za ekonomsku suradnju i razvoj (OECD), proveo je još dvije dodatne analize: analizu uporabne valjanosti među nastavnicima, sveučilištima i zaposlenicima, te kognitivni laboratorij s petnaestogodišnjacima iz različitih zemalja kako bi se od učenika prikupile povratne informacije o primjerima zadataka prikazanih u konceptualnom okviru. Rad stručne skupine za matematiku u ciklusu PISA 2021 bazirao se na prethodnim inačicama PISA-ina matematičkog konceptualnog okvira, kao i na preporukama Matematičke strateške savjetodavne skupine koju je OECD osnovao 2017. godine.

DEFINIRANJE MATEMATIČKE PISMENOSTI

16. Razumijevanje matematike ključni je element pripremljenosti mladih za aktivno sudjelovanje i doprinosenje modernom društvu. Sve veći broj problema i situacija s kojima se susrećemo u svakodnevnom životu i profesionalnom kontekstu zahtijevaju određenu razinu razumijevanja matematike. Matematika će za mlade predstavljati veoma važan alat kako se budu suočavali s nizom različitih problema i izazova u različitim aspektima svog života.

17. Zbog navedenih razloga važno je dobiti dobar uvid u to koliko su adekvatno mladi na završetku obveznog obrazovanja pripremljeni za primjenu matematike kako bi promišljali o svom životu, planirali budućnost te razmatrali i rješavali ključne probleme vezane uz važna pitanja u njihovim životima. Istraživanje o učenicima u dobi od 15 godina pruža zemljama ranu indikaciju načina na koji će učenici u kasnijem životu biti sposobni reagirati u različitim situacijama koje uključuju matematiku i za čije je razumijevanje potrebna sposobnost matematičkog zaključivanja (i deduktivnog i induktivnog) i rješavanja problema.

18. Ispitivanje matematičkih znanja i vještina petnaestogodišnjih učenika trebalo bi se temeljiti na sljedećem pitanju: „Što bi građani trebali znati i biti sposobni činiti u situacijama koje uključuju matematiku?“ Ili konkretnije, što matematičke kompetencije znače za petnaestogodišnjake koji završavaju školovanje ili se možda pripremaju za nastavak školovanja za određeno zanimanje ili za upis na fakultet? Konstrukt matematičke pismenosti, koji se u ovom okviru odnosi na *sposobnosti pojedinaca da razmišljaju na matematički način i rješavaju probleme u različitim kontekstima 21. stoljeća*, ne bi se smio doživljavati kao sinonim za minimalna, jednostavna znanja i vještine, već kao sposobnost *matematičkog zaključivanja i korištenja matematičkih koncepata, procedura, činjenica i alata kako bi se opisivale, objašnjavale i predviđale pojave*. Ovakvo shvaćanje matematičke pismenosti prepoznaje da je važno da učenici razviju dobro razumijevanje različitih matematičkih koncepata i procesa te spoznaju korisnost istraživanja u stvarnom životu uz potporu matematike. Konstrukt matematičke pismenosti, na način na koji je definiran u PISA-i, stavlja velik naglasak na potrebu da učenici razviju sposobnost primjene matematike u kontekstu, kao i na važnost stjecanja bogatih iskustava u nastavi matematike da bi se to postiglo. To jednako vrijedi i za petnaestogodišnje učenike koji se bliže kraju formalnog učenja matematike, i za učenike koji će nastaviti s formalnim učenjem matematike i za petnaestogodišnjake izvan školskog sustava.

19. Matematička pismenost prelazi dobne granice. Primjerice, OECD-ov Program za međunarodno ispitivanje kompetencija odraslih (PIAAC) definira matematičku pismenost kao *sposobnost pristupanja, korištenja, tumačenja i komuniciranja matematičkih informacija i ideja radi angažiranja i upravljanja matematičkim zahtjevima u različitim situacijama koje se javljaju u životu odrasle osobe*. Paralele između ove definicije za odrasle i definicije matematičke pismenosti za petnaestogodišnjake korištene u istraživanju PISA 2021 evidentne su i neiznenađujuće.

20. S obzirom na to da se u ispitivanju matematičke pismenosti petnaestogodišnjaka mora voditi računa o relevantnim karakteristikama učenika, potrebno je utvrditi sadržaje, terminologiju i kontekste primjerene tom uzrastu. Ovaj okvir razlikuje široke sadržajne kategorije važne za matematičku pismenost pojedinaca općenito, ali i specifične sadržajne teme primjerene za petnaestogodišnje učenike. Matematička pismenost nije odlika koju neki pojedinac ima ili nema, već odlika na kontinuumu – neki uspijevaju razviti veće razine matematičke pismenosti od drugih, iako potencijal za napredak uvijek postoji.

21. U istraživanju PISA 2021 koristi se sljedeća definicija matematičke pismenosti:

Matematička pismenost je sposobnost pojedinca da matematički zaključuje te formulira, primjenjuje i tumači matematiku prilikom rješavanja problema u različitim stvarnim životnim kontekstima. Ona obuhvaća koncepte, procedure, činjenice i alate potrebne za opisivanje, objašnjavanje i predviđanje pojava. Pomaže pojedincu da prepozna ulogu koju matematika ima u svijetu i da donosi dobro utemeljene odluke i prosudbe koje su mu potrebne kao konstruktivnom, angažiranom i promišljajućem građaninu 21. stoljeća.

22. U usporedbi s konceptualnim okvirima korištenim u istraživanjima PISA 2003 i PISA 2012, konceptualni okvir u istraživanju PISA 2021 prepoznaje i zadržava njihove osnovne ideje matematičke pismenosti, no vodi računa i o tome da su se u životu učenika dogodile brojne promjene, što ukazuje na potrebu za promjenom i u načinu ispitivanja matematičke pismenosti u usporedbi s pristupom korištenim u prethodnim okvirima. Tendencija je odmaknuti se od izvođenja najosnovnijih računskih operacija prema svijetu koji se mijenja velikom brzinom uslijed pojave novih tehnologija i trendova prema kojima su građani kreativni i angažirani te donose odluke za sebe i društvo u kojem žive.

23. S obzirom na to da tehnologija ima sve važniju ulogu u životima učenika, dugoročni smjer matematičke pismenosti trebao bi obuhvatiti i sinergistički i recipročni odnos između matematičkog mišljenja i računalnog mišljenja, definiran kao „način na koji razmišlja računalni znanstvenik“ (Wing, 2006²) te promatran kao misaoni proces koji podrazumijeva formuliranje problema i osmišljavanje njegovih rješenja u obliku koji može izvršiti računalno, čovjek ili kombinacija računala i čovjeka (Wing, 2011³). Uloga koju računalno mišljenje ima u matematici uključuje način na koji su specifične matematičke teme u međusobnoj interakciji sa specifičnim računalnim temama te način na koji matematičko zaključivanje nadopunjava računalno mišljenje (Gadanidis, 2015; Rambally, 2017). Na primjer, Pratt i Noss (2002) raspravljaju o korištenju računalnog mikrosvijeta za razvoj matematičkog znanja u slučaju slučajnosti i vjerojatnosti; Gadanidis i sur. (2018) predlažu pristup za uključivanje mlađe djece na temelju ideja teorija grupa koristeći kombinaciju praktičnih i računalnih alata za računalno razmišljanje. Dakle, dok matematičko obrazovanje evolviru u pogledu raspoloživih alata i mogućih načina za pružanje podrške učenicima u istraživanju ideja u ovoj disciplini (Pei, Weintrop i Wilensky, 2018), promišljeno korištenje alata za računalno razmišljanje i skupa vještina može produbiti učenje matematičkih sadržaja stvarajući učinkovite uvjete za učenje (Weintrop i sur., 2016). Štoviše, alati za računalno razmišljanje učenicima nude kontekst u kojem mogu konkretizirati apstraktne konstrukte (istražujući i koristeći matematičke koncepte na dinamičan način) (Wing, 2008⁴) te izraziti ideje na nove načine i istraživati koncepte uz pomoć medija i novih reprezentacijskih alata (Grover, 2018; Niemelä i sur., 2017; Pei, Weintrop i Wilensky, 2018; Resnick i sur., 2009).

² J. Wing, *Computational Thinking*, Communications of the ACM, svezak 49, br. 3, ožujak 2006., str. 33–35.

³ J. Wing, *Computational Thinking – What and Why?*, The Magazine of Carnegie Mellon University's School of Computer Science, ožujak 2011. The LINK, Research Notebook. <https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why>.

⁴ J. Wing, *Computational thinking and thinking about computing*, Philosophical Transactions of The Royal Society A, 366:3717-3725, 2008.

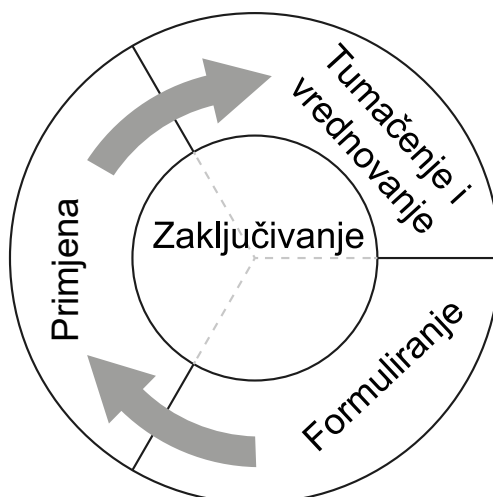
Ideja matematički pismenog pojedinca u istraživanju PISA 2021

24. U definiciji matematičke pismenosti fokus je na aktivnom korištenju matematike radi rješavanja problema iz stvarnoga života u različitim kontekstima, a njome se želi obuhvatiti matematičko zaključivanje (i deduktivno i induktivno) i rješavanje problema uz pomoć matematičkih koncepata, procedura, činjenica i alata kako bi se opisivale, objašnjavale i predviđale pojave.

25. Važno je istaknuti da definicija matematičke pismenosti nije samo usmjerena na korištenje matematike u rješavanju problema iz stvarnog života, već ona prepoznaje i matematičko zaključivanje kao središnji aspekt matematičke pismenosti. Konceptualni okvir istraživanja PISA 2021 doprinosi isticanju središnje uloge matematičkog zaključivanja i u ciklusu rješavanja problema i u matematičkoj pismenosti općenito.

26. **Prikaz 1** opisuje odnos između matematičkog zaključivanja (i deduktivnog i induktivnog) i rješavanja problema, kao što je prikazano u ciklusu matematičkog modeliranja u okvirima istraživanja PISA 2003 i PISA 2012.

Prikaz 1. Matematička pismenost: odnos između matematičkog zaključivanja i ciklusa rješavanja problema (modeliranja)



27. Da bi bili matematički pismeni, učenici moraju prvo biti sposobni koristiti svoje matematičko sadržajno znanje da bi prepoznali matematičku prirodu situacije (problema), osobito situacija s kojima se susreću u stvarnom životu, a zatim je formulirali na matematički način. Ta transformacija – od neodređene, neorganizirane stvarne životne situacije do dobro definiranog matematičkog problema – zahtijeva matematičko zaključivanje. Nakon uspješne transformacije, dobiveni matematički problem treba riješiti korištenjem matematičkih koncepata, algoritama i procedura naučenih u školi. No to može zahtijevati i donošenje strateških odluka o odabiru alata i redoslijeda njihove primjene, što je također manifestacija matematičkog zaključivanja. Konačno, PISA-ina nas definicija podsjeća da učenici trebaju vrednovati matematičko rješenje tumačeći rezultate u izvornoj situaciji iz stvarnog života. Uz to, učenici bi trebali prilikom rješavanja problema posjedovati i primijeniti vještine računalnog razmišljanja. Vještine računalnog razmišljanja koje se koriste prilikom formuliranja, primjene, vrednovanja i zaključivanja uključuju prepoznavanje uzoraka, dekompoziciju, utvrđivanje alata (ako postoje) koji bi se mogli koristiti u analiziranju i rješavanju problema te definiranje algoritama u sklopu detaljnog rješenja.

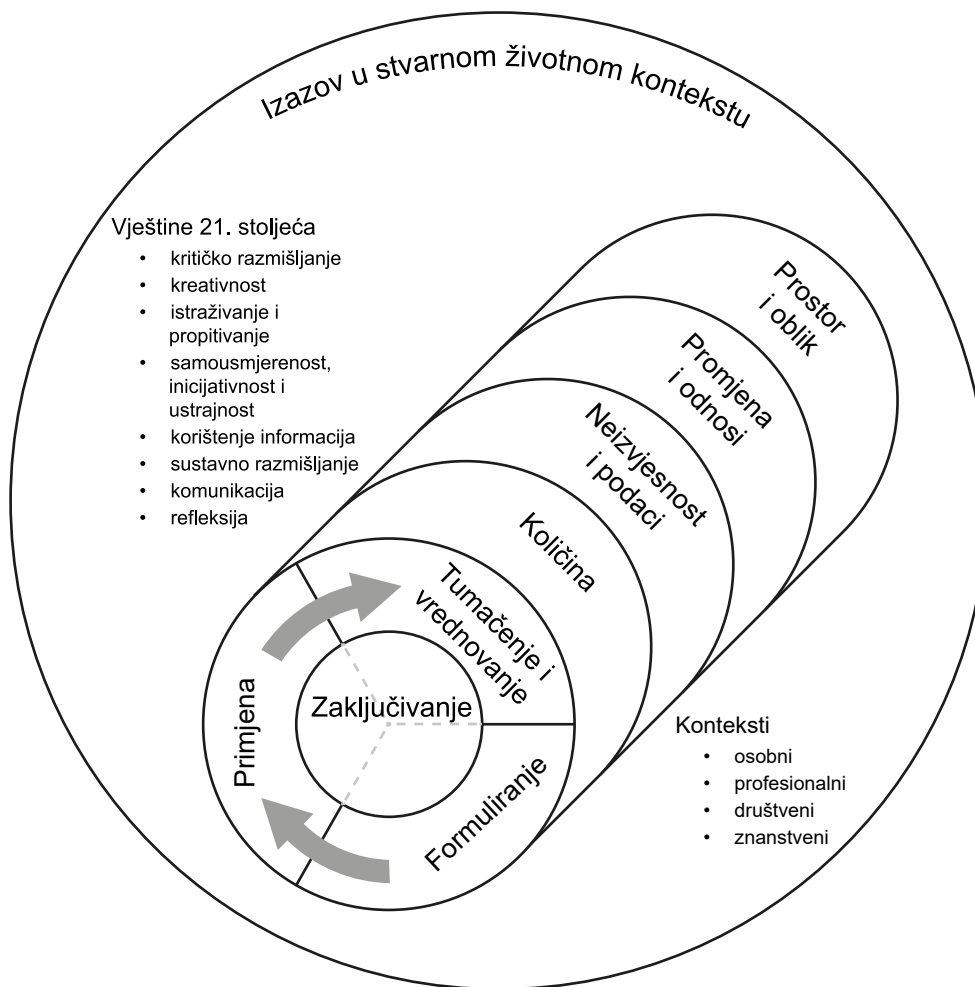
28. Iako se matematičko zaključivanje i rješavanje problema iz stvarnoga života preklapaju, matematičko zaključivanje u određenom aspektu nadilazi rješavanje praktičnih problema. Matematičko zaključivanje također je i način vrednovanja i stvaranja argumenata, vrednovanja interpretacija i

zaključaka o tvrdnjama (npr. u javnim političkim debatama itd.) i rješenjima problema koji se, zbog svoje kvantitativne prirode, najbolje razumiju matematički.

29. Matematička pismenost stoga obuhvaća dva međusobno povezana aspekta: *matematičko zaključivanje i rješavanje problema*. *Matematička pismenost* ima važnu ulogu u sposobnosti korištenja matematike u *rješavanju problema iz stvarnoga života*. Uz to, matematičko zaključivanje (i deduktivno i induktivno) također nadilazi rješavanje problema iz stvarnog života s obzirom na to da obuhvaća donošenje informiranih prosudbi o važnoj skupini društvenih pitanja koja se mogu riješiti na matematički način. Ono također obuhvaća i donošenje prosudbi o valjanosti informacija kojima su pojedinci zasuti na temelju razmatranja njihovih kvantitativnih i logičkih implikacija. Upravo na taj način matematička pismenost doprinosi razvoju vještina 21. stoljeća (o kojima se raspravlja u ovom okviru).

30. Vanjski krug Prikaza 2 pokazuje da se matematička pismenost odvija u kontekstu izazova ili problema koji se javlja u stvarnom životu.

Prikaz 2. PISA 2021: odnos između matematičkog zaključivanja, ciklusa rješavanja problema (modeliranja), matematičkih sadržaja, konteksta i odabranih vještina 21. stoljeća



31. Prikaz 2 također prikazuje odnos između matematičke pismenosti na način na koji je opisana u Prikazu 1 te matematičkih sadržajnih područja u kojima se primjenjuje matematička pismenost, konteksta problema te odabranih vještina 21. stoljeća koje podupiru matematičku pismenost i uz pomoć kojih se matematička pismenost razvija.

32. Kategorije matematičkog sadržaja obuhvaćaju: količinu, neizvjesnost i podatke, promjenu i odnose te prostor i oblike. Riječ je o kategorijama matematičkog sadržaja na koje se učenici trebaju

oslanjati u zaključivanju, formuliranju problema (transformiranjem situacije iz stvarnoga života u matematičku problemsku situaciju), rješavanju novoformuliranog matematičkog problema te tumačenju i vrednovanju dobivenog rješenja.

33. Kao i u prethodnim konceptualnim okvirima, četiri kontekstualna područja koja se nastavljaju koristiti u PISA-i kako bi se definirale situacije iz stvarnog života obuhvaćaju osobni, profesionalni, društveni i znanstveni kontekst. Kontekst može biti osobne prirode i sadržavati probleme ili izazove s kojima se može susretati pojedinac ili njegova obitelj ili skupina vršnjaka. Problem može biti smješten i u društveni kontekst (usredotočen na širu zajednicu – lokalnu, nacionalnu ili globalnu), profesionalni kontekst (usmjeren na svijet rada) ili znanstveni kontekst (povezan s primjenom matematike u prirodnom i tehnološkom svijetu).

34. Konceptualni okvir istraživanja PISA 2021 po prvi put uključuje (i opisuje u Prikazu 2) odabrane vještine 21. stoljeća na koje se oslanja i koje razvija matematička pismenost. O vještinama 21. stoljeća detaljnije se raspravlja u sljedećem odjeljku ovog Okvira, no ovdje bi trebalo istaknuti da, iako konteksti (osobni, društveni, profesionalni i znanstveni) utječu na razvoj zadataka, zadaci ne bi trebali biti temeljeni ili usmjereni na vještine 21. stoljeća. Umjesto toga, očekuje se da će u duhu konceptualnog okvira i u skladu s definicijom matematičke pismenosti odabrane vještine 21. stoljeća biti ugrađene u zadatke.

35. Formulacija definicije i njezina reprezentacija u Prikazima 1 i 2 zadržavaju i integriraju koncept matematičkog modeliranja koji je od ranije temelj PISA-ina matematičkog konceptualnog okvira (OECD, 2004; OECD, 2013). Ciklus modeliranja (formuliranje, primjena, tumačenje i vrednovanje) središnji je aspekt PISA-ina koncepta matematički pismenih učenika. Međutim, često nije nužno proći kroz sve faze ciklusa modeliranja, osobito u kontekstu istraživanja (Galbraith, Henn and Niss, 2007). Često se događa da veći dio ciklusa matematičkog modeliranja pokreću drugi, a krajnji korisnik ne izvršava sve, već samo neke od koraka ciklusa modeliranja. Primjerice, u nekim slučajevima dostupne su matematičke reprezentacije poput grafikona ili jednadžbi kojima se može izravno manipulirati kako bi se odgovorilo na neko pitanje ili izveo neki zaključak. U drugim slučajevima učenici mogu koristiti računalne simulacije kako bi istražili učinak promjena u varijablama u sustavu ili okolišu. Zbog tog razloga, mnogi zadaci u PISA-i obuhvaćaju samo dijelove ciklusa modeliranja. U stvarnosti, osoba koja rješava neki problem može ponekad oscilirati između različitih procesa te se vraćati unatrag kako bi preispitala ranije odluke i pretpostavke. Svaki od procesa može predstavljati velik izazov, a ponekad je možda potrebno i više puta ponoviti cijeli ciklus.

36. Konkretno, glagoli 'formulirati', 'primjenjivati' i 'tumačiti' ukazuju na tri procesa kroz koja prolaze učenici prilikom aktivnog rješavanja problema. Matematičko formuliranje situacija obuhvaća primjenu matematičkog zaključivanja (i deduktivnog i induktivnog) za prepoznavanje prilika za primjenu i korištenje matematike – uviđanje da se može primijeniti matematika kako bi se razumio ili riješio određeni predstavljeni problem ili izazov. To uključuje sposobnost prihvaćanja situacije onakvom kakva jest i njezina transformiranja u oblik koji je prikladan za matematičku obradu, određivanje matematičke strukture i prikaza, utvrđivanje varijabli i stvaranje pojednostavljenih pretpostavki kako bi se lakše riješio neki problem ili odgovorilo na izazov. Primjena matematike odnosi se na matematičko zaključivanje uz korištenje matematičkih koncepata, procedura, činjenica i alata da bi se došlo do matematičkog rješenja. To uključuje računanje, manipuliranje algebarskim izrazima i jednadžbama ili drugim matematičkim modelima, analiziranje informacija iz matematičkih prikaza i grafikona na matematički način, stvaranje matematičkih opisa i objašnjenja te korištenje matematičkih alata kako bi se riješili problemi. Tumačenje matematike obuhvaća promišljanje o matematičkim rješenjima ili rezultatima te njihovo tumačenje u kontekstu problema ili izazova. To uključuje primjenu matematičkog zaključivanja kako bi se vrednovala matematička rješenja u odnosu na kontekst problema te utvrđivanje jesu li rezultati logični i imaju li smisla u danoj situaciji, kao i utvrđivanje što je potrebno istaknuti prilikom objašnjavanja rješenja.

37. Konceptualni okvir istraživanja PISA 2021 po prvi put prepoznaje presijecanje matematičkog i računalnog razmišljanja iz čega proizlazi skupina sličnih perspektiva, misaonih procesa i mentalnih modela koji su učenicima potrebni za uspjeh u svijetu u kojem tehnologija ima sve veću ulogu. Skupina temeljnih postupaka koji pripadaju računalnom razmišljanju (odnosno apstrakcija, algoritamsko razmišljanje, automatizacija, dekompozicija i generalizacija) također se nalaze i u središtu matematičkog zaključivanja i procesa rješavanja problema. Priroda računalnog razmišljanja unutar matematike konceptualizirana je kao definiranje i elaboriranje matematičkog znanja koje se može izraziti programiranjem, omogućujući učenicima dinamičko modeliranje matematičkih koncepata i odnosa. Taksonomija uvježbavanja računalnog razmišljanja prilagođenog posebno za učenje matematike i prirodoslovlja podrazumijeva vježbe s podacima, vježbe modeliranja i simuliranja, vježbe računalnog rješavanja problema te vježbe sustavnog razmišljanja (Weintrop i sur., 2016). Kombinacija matematičkog i računalnog razmišljanja nije samo neophodna da bi se učinkovito podržalo učenikovo konceptualno razumijevanje matematičkog područja, već i da bi se razvijali njegovi koncepti i vještine računalnog razmišljanja, omogućujući mu tako stvarniji uvid u načine korištenja matematike u profesionalnom i stvarnom životu, što ga zatim bolje priprema za nastavak karijere u srodnim područjima (Basu i sur., 2016; Benton i sur., 2017; Pei, Weintrop i Wilensky, 2018; Beheshti i sur., 2017).

Izravna povezanost s različitim kontekstima problema u istraživanju PISA 2021

38. Upućivanjem na „različite stvarne životne kontekste“, definicija matematičke pismenosti prepoznaje da je građanin 21. stoljeća korisnik kvantitavnih, a ponekad i statističkih argumenata. Time se želi stvoriti veza sa specifičnim kontekstima koji su detaljnije opisani i ilustrirani u nastavku ovog konceptualnog okvira. Iako specifični konteksti nisu toliko važni sami po sebi, odabrane četiri kategorije koje se ovdje koriste (osobni, profesionalni, društveni i znanstveni) odražavaju širok raspon situacija u kojima se pojedinci mogu susresti s prilikama za korištenje matematike. Definicija također prepoznaje da matematička pismenost pomaže pojedincima da prepoznaju ulogu koju matematika ima u svijetu i da donose dobro utemeljene prosudbe i odluke koju su im potrebne kao konstruktivnim, zainteresiranim i promišljajućim građanima kad se susretnu s porukama i argumentima poput: „Studija je pokazala da u prosjeku...“, „Istraživanje ukazuje na veliki pad...“, „Neki znanstvenici tvrde da će rast stanovništva nadmašiti proizvodnju hrane za x godina ...“ itd.

Važna uloga matematičkih alata i tehnologije u istraživanju PISA 2021

39. Definicija matematičke pismenosti izričito navodi korištenje matematičkih alata koji uključuju različitu fizičku i digitalnu opremu, softvere te uređaje za računanje. U 21. stoljeću računalni matematički alati svakodnevno se koriste na radnom mjestu, no njihova će uporaba na radnome mjestu i društvu općenito biti i češća kako stoljeće bude odmicalo. Priroda svakodnevnih problema i problema koji se susreću na radnome mjestu te zahtjeva da pojedinci budu sposobni matematički zaključivati (i deduktivno i induktivno) u situacijama u kojima su dostupni računalni alati s ovim se novim mogućnostima proširila – zbog čega rastu i očekivanja u pogledu matematičke pismenosti.

40. Rješavanje testa na računalu glavni je način ispitivanja u PISA-i još od 2015. godine, iako su zemlje koje nisu htjele testirati svoje učenike na računalima mogle koristiti i ekvivalentne tiskane instrumente. Međutim, u ispitivanju matematičke pismenosti 2015. i 2018. godine nisu se koristile mogućnosti koje pruža računalo.

41. Od 2021. godine matematička pismenost ispitivat će se putem računala. Iako će zemlje koje žele nastaviti provoditi ispitivanje uz pomoć tiskanih testova i dalje imati tu mogućnost, ispitivanje matematičke pismenosti putem računala koristit će mogućnosti koje pružaju računala. U nastavku ovog konceptualnog okvira detaljnije se raspravlja o mogućnostima koje pruža prijelaz na računala.

ORGANIZACIJA PODRUČJA

42. PISA-in konceptualni okvir matematičke pismenosti definira domenu matematike u PISA istraživanju te opisuje pristup korišten u ispitivanju matematičke pismenosti petnaestogodišnjih učenika. PISA ispituje koliko su petnaestogodišnji učenici sposobni matematički zaključivati i uspješno koristiti matematiku prilikom suočavanja sa situacijama i problemima – od kojih je većina smještena u kontekste iz stvarnog života.

43. Za potrebe istraživanja, definicija matematičke pismenosti korištena u istraživanju može se analizirati s obzirom na tri međusobno povezana aspekta (vidi Prikaz 2):

- matematičko zaključivanje (i deduktivno i induktivno) i rješavanje problema (koje obuhvaća matematičke procese koji opisuju što pojedinci rade da bi povezali kontekst problema s matematikom i tako riješili problem)
- matematički sadržaj koji bi se trebao koristiti u zadacima
- kontekste u koje su zadaci smješteni zajedno s odabranim⁵ vještinama 21. stoljeća koje podupiru matematičku pismenost i koje se razvijaju kroz matematičku pismenost.

44. Kako bi se produbilo razumijevanje i pružile smjernice za razvoj zadataka, ovi su aspekti detaljnije opisani u sljedećim odjeljcima. Stavljajući naglasak na ove aspekte, matematički konceptualni okvir u istraživanju PISA 2021 pomaže da se osigura da zadaci razvijeni u istraživanju obuhvaćaju širok raspon matematičkog zaključivanja i rješavanja problema, sadržaja, konteksta i vještina 21. stoljeća kako bi, gledajući u cjelini, skup zadataka u testu učinkovito operacionalizirao ono što ovaj konceptualni okvir definira kao matematičku pismenost. Organizacija ovog poglavlja temeljena je na sljedećim pitanjima zasnovanima na definiciji matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021:

- Što pojedinci rade kad matematički zaključuju i rješavaju kontekstualne matematičke probleme?
- Koja bi matematička sadržajna znanja trebali imati pojedinci, a posebno petnaestogodišnji učenici?
- U kojem je kontekstu moguće promatrati i ispitivati matematičku pismenost te na koji je način to povezano s odabranim vještinama 21. stoljeća?

Matematičko zaključivanje i procesi rješavanja problema

Matematičko zaključivanje

45. Matematičko zaključivanje (i deduktivno i induktivno) obuhvaća procjenjivanje situacija, odabir strategija, izvođenje logičkih zaključaka, razvoj i opisivanje rješenja te prepoznavanje načina na koji se takva rješenja mogu primijeniti. Učenici matematički zaključuju kada:

- identificiraju, prepoznaju, organiziraju, povezuju i prikazuju
- konstruiraju, apstrahiraju, vrednuju, zaključuju, opravdavaju, objašnjavaju i brane te
- tumače, prosuđuju, kritički procjenjuju, osporavaju i kvalificiraju.

⁵ Odabrane vještine preporučila je OECD-ova Savjetodavna skupina (SAG) (PISA 2021 Mathematics: A Broadened Perspective prepoznavajući povezanost između generičkih vještina 21. stoljeća i srodnih, ali predmetno specifičnih vještina koje su prirodno dio poučavanja ovog područja. Savjetodavna je skupina predložila osam vještina 21. stoljeća za uključivanje u matematički kurikulum te, kao takve, i u konceptualni okvir istraživanja PISA 2021. Te su vještine navedene u odlomku 124.

46. Sposobnost logičkog zaključivanja i iznošenja argumenata na iskren i uvjerljiv način postaje sve važnija u današnjem svijetu. Matematika je znanost o dobro definiranim objektima i idejama koje se mogu analizirati i transformirati na različite načine primjenom 'matematičkog zaključivanja' kako bismo došli do zaključaka u koje smo sigurni. Kroz matematiku, učenici uče da ispravnim zaključivanjem mogu doći do rezultata i zaključaka koje smatraju točnima. Nadalje, ti su zaključci logični i objektivni, a samim time i nepristrani, bez ikakve potrebe za potvrđivanjem od strane vanjskog autoriteta. Ovakva vrsta zaključivanja, koja je korisna i izvan matematike, može se učinkovito poučavati i uvježbavati u sklopu matematike.

47. Dva su aspekta matematičkog zaključivanja posebno važna u današnjem svijetu i definiranju PISA zadataka. Prvi aspekt odnosi se na zaključivanje na temelju jasnih pretpostavki (deduktivno zaključivanje), koje je karakteristično obilježje matematičkog procesa. Korisnost ove sposobnosti već je istaknuta. Druga važna dimenzija odnosi se na statističko i probabilističko (induktivno) zaključivanje. Na logičkoj razini u svijesti pojedinaca danas često dolazi do konfuzije između mogućeg i vjerojatnog zbog čega mnogi nasjedaju teorijama zavjere ili lažnim vijestima. Iz tehničke perspektive, današnji je svijet sve kompleksniji, a njegove višestruke dimenzije zastupljene su terabajtima podataka. Razumijevanje takvih podataka jedan je od najvećih izazova s kojima će se čovječanstvo suočavati u budućnosti. Naši bi učenici trebali poznavati prirodu takvih podataka te donositi informirane odluke u kontekstu varijacija i neizvjesnosti.

48. Matematičko zaključivanje (i deduktivno i induktivno), koje se temelji na ključnim vrstama razumijevanja, a koje se razvija u nastavi matematike, središte je matematičke pismenosti. Ključno razumijevanje odnosi se na:

- razumijevanje količine, brojevnih sustava i algebarskih svojstava
- razumijevanje moći apstrakcije i simboličke reprezentacije
- uočavanje matematičkih struktura i njihovih zakonitosti
- prepoznavanje funkcionalnih odnosa među količinama
- korištenje matematičkog modeliranja za prikazivanje stvarnog svijeta (npr. fenomena u fizikalnim, biološkim, društvenim, ekonomskim i beiheviornalnim znanostima) te
- razumijevanje varijacija kao osnove statistike.

U nastavku slijede opisi svake od navedenih vrsta razumijevanja, kao i načini na koje podupiru zaključivanje. Iako se opisi možda čine apstraktnima, u PISA istraživanju oni se ne bi trebali tumačiti na apstraktan način. Svrha opisa jest prikazati na koje se načine navedene ideje javljaju u školskoj matematici, te kako, stavljajući naglasak na njih u poučavanju, pomažemo učenicima da shvate načine na koje se mogu primjenjivati u novim i različitim kontekstima.

Razumijevanje količine, brojevnih sustava i algebarskih svojstava

49. Osnovni pojam veličine možda je najrašireniji i najvažniji matematički aspekt sudjelovanja i funkcioniranja u svijetu (OECD, 2017, str. 18). Na elementarnoj razini, riječ je o korisnoj sposobnosti uspoređivanja kardinalnosti skupova objekata. Sposobnost brojanja obično obuhvaća prilično male skupove – u većini jezika, samo manji podskup brojeva ima svoj naziv. Kad procjenjujemo veće skupove, obavljamo kompleksnije operacije procjenjivanja, zaokruživanja i primjene pravila reda veličine. Brojenje je vrlo usko povezano s jednom drugom temeljnom operacijom klasificiranja gdje se javlja ordinalni aspekt brojeva. Kvantifikacija obilježja objekata (mjerjenje), odnosa, situacija i entiteta u svijetu jedan je od najosnovnijih načina konceptualiziranja okolnoga svijeta (OECD, 2017).

50. Razumijevanje količine, brojevnih sustava i njihovih algebarskih svojstava obuhvaća osnovni pojam broja, brojevnih sustava (npr. cijeli brojevi, integrali, racionalni brojevi, realni brojevi), aritme-

tike i algebarskih svojstava sustava. Konkretno, korisno je razumjeti kako postupno sve širi brojevi sustavi omogućuju rješavanje postupno sve složenijih jednadžbi. Na temelju toga učenici, kako uče matematiku, pronalaze sve više dokaza o matematici u stvarnom životu.

51. Da bi se kvantifikacija mogla učinkovito primjenjivati, potrebna je sposobnost korištenja ne samo brojeva, već i brojevnih sustava. Brojevi sami po sebi imaju ograničenu primjenjivost; ono što ih čini moćnim alatima jesu operacije koje s njima možemo izvoditi. Kao takvo, dobro razumijevanje operacija s brojevima temelj je matematičkog zaključivanja.

52. Također, važno je razumjeti i princip reprezentacije (poput simbola koji uključuju brojeve, točke na brojevnoj crti, geometrijske veličine i posebni simboli poput π) te kako prelaziti s jedne reprezentacije na drugu; načine na koje brojevi sustavi utječu na takve reprezentacije; načine na koje su algebarska svojstva tih sustava relevantna i važna za djelovanje unutar sustava; te značaj aditivnih i multiplikativnih identiteta, asocijativnosti, komutativnosti te svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju. Algebarska načela podupiru sustav vrijednosti decimalnih mjesta, omogućujući ekonomično izražavanje brojeva i učinkovite pristupe operacijama koje se izvode s njima. Ona su također od središnje važnosti i za brojeve operacije, uključujući rad s aditivnim inverzima koji su ključni za zbrajanje i oduzimanje prvo cijelih brojeva, zatim racionalnih brojeva, i konačno realnih brojeva.

53. Središnja uloga broja kao ključnog koncepta u svim drugim matematičkim područjima i u samome matematičkom zaključivanju neosporna je. Razumijevanje algebarskih načela i svojstava koje učenici prvo stječu u radu s brojevima od temeljne je važnosti za njihovo razumijevanje konceptata srednjoškolske algebre, kao i za njihovu sposobnost uspješnog manipuliranja algebarskim izrazima potrebnim za rješavanje jednadžbi, postavljanje modela, graficiranje funkcija te programiranje i stvaranje formula u tabličnom kalkulatoru. A u današnjem svijetu temeljenom na podacima, lakoća u interpretaciji uzoraka brojeva, usporedba uzoraka i druge numeričke vještine imaju sve veću važnost.

54. *Temeljno razumijevanje količine i brojevnih sustava potpomaže zaključivanju u stvarnim životnim matematičkim aplikacijama predviđenim ovim konceptualnim okvirom.*

Razumijevanje moći apstrakcije i simboličke reprezentacije

55. Temeljne matematičke ideje razvile su se iz ljudskih iskustava i potrebe za davanjem koherenosti, reda i predvidljivosti takvim iskustvima. Mnogi matematički objekti modeliraju stvarnost ili u najmanju ruku na neki način odražavaju aspekte stvarnosti. No suština apstrakcije u matematici jest u tome da ona predstavlja samodostatan sustav i da matematički objekti dobivaju značenje unutar tog sustava. Apstrakcija obuhvaća namjerno i selektivno razmatranje strukturnih sličnosti između matematičkih objekata te konstruiranje odnosa između tih objekata na temelju tih sličnosti. U školskoj matematici apstrakcija oblikuje odnose između konkretnih objekata, simboličkih reprezentacija i operacija uključujući algoritme i mentalne modele. Ta sposobnost također ima važnu ulogu u radu s računalnim uređajima. Sposobnost stvaranja, manipuliranja i razumijevanja u radu s apstrakcijama u tehnološkim kontekstima važna je vještina računalnog razmišljanja.

56. Primjerice, djeca počinju razvijati pojam „kruga“ stječući iskustvo s određenim objektima koji ih dovode do neformalne spoznaje da je krug nešto „okruglo“. Da bi prikazala te objekte, djeca mogu crtati krugove uočavajući sličnosti između crteža kako bi se uopćila „okruglost“, iako je riječ o krugovima različitih veličina. „Krug“ postaje apstraktni matematički objekt u trenutku kad učenici počnu „koristiti“ krugove kao objekte u svom radu, a još formalnije kad ga definiraju kao skup točaka podjednako udaljenih od jedne fiksne točke u dvodimenzionalnoj ravnini.

57. Učenici koriste reprezentacije – bilo da je riječ o tekstualnim, simboličkim, grafičkim, brojčanim, geometrijskim reprezentacijama ili onima u programskom kodu – da bi organizirali i komunicirali svoje matematičko razmišljanje. Reprezentacije nam omogućuju da prikazemo matematičke ideje na

sažeti način, što zatim dovodi do učinkovitih algoritama. Reprerentacije su također središnji element matematičkog modeliranja s obzirom na to da omogućuju učenicima da apstrahiraju pojednostavljenu ili idealiziranu formulaciju problema iz stvarnog svijeta. Takve su strukture također važne za tumačenje i definiranje ponašanja računalnih uređaja.

58. *Razumijevanje apstrakcije i simboličke reprezentacije potpomaže zaključivanju u stvarnim životnim aplikacijama matematike predviđenim ovim konceptualnim okvirom na način da omogućuje učenicima da skrenu pozornost sa specifičnih detalja neke situacije prema njezinim općenitijim obilježjima te da ih opišu na učinkovit način.*

Uočavanje matematičkih struktura i njihovih pravilnosti

59. Kada osnovnoškolski učenici vide „ $5 + (3 + 8)$ “, neki od njih uočavaju niz simbola koji označavaju računske operacije koje je potrebno izvršiti u skladu s pravilima redoslijeda izvođenja računskih operacija; drugi pak vide broj koji se dodaje zbroju drugih dvaju brojeva. Ova druga skupina učenika uočava strukturu – zbog toga im ne treba reći koji treba biti redoslijed računskih operacija s obzirom na to da, ako nekom zbroju želimo dodati neki broj, prvo trebamo izračunati zbroj.

60. Uočavanje strukture postaje sve važnije kako učenici prelaze u više razrede. Učenik koji u „ $f(x) = 5 + (x - 3)^2$ “ prepoznaje $f(x)$ kao zbroj od 5 i kvadrata koji je nula kad je $x = 3$, razumije da minimum od f iznosi 5. Na taj se način postavljaju temelji za funkcionalno razmišljanje o kojem je riječ u idućem odjeljku.

61. Struktura je usko povezana sa simboličkom reprezentacijom. Simboli su snažni, no samo ako zadrže smisao, u protivnom postaju beznačajni objekti koji se prerazmještaju po stranici. Uočavanje strukture način je pronalaženja i pamćenja značenja apstraktne reprezentacije. Takve su strukture također važne za tumačenje i definiranje ponašanja računalnih uređaja. Sposobnost uočavanja strukture važna je konceptualna pomoć proceduralnom znanju.

62. Gornji primjeri ilustriraju kako uočavanje strukture u apstraktnim matematičkim objektima predstavlja način da se pravila parsiranja, koje može izvršiti računalno, zamijene konceptualnim slikama onih objekata koje jasno prikazuju njihova svojstva. Objekt koji se zamišlja na takav način podložan je zaključivanju na razini višoj od jednostavne simboličke manipulacije.

63. Snažan osjećaj za matematičku strukturu koristan je i u modeliranju. Kad objekti koji se razmatraju nisu apstraktni matematički objekti, već objekti iz stvarnog svijeta koje je potrebno matematički modelirati, kao vodilja za modeliranje može poslužiti matematička struktura. Učenici mogu nametnuti strukturu i nematematičkim objektima kako bi ih mogli podvrgnuti matematičkoj analizi. Nepravilni oblici mogu se procijeniti u z pomoć jednostavnijih oblika čija je površina poznata. Geometrijski uzorak može se razumjeti hipoteziranjem translacijskih, rotacijskih ili refleksivnih transformacija i simetrije te apstraktnim proširivanjem uzorka na cjelokupni prostor. Statističke analize često su stvar nametanja strukture skupu podataka, primjerice pretpostavljajući da dolazi iz normalne distribucije ili da je jedna varijabla linearna funkcija druge, ali mjerena s normalno raspodijeljenom pogreškom.

64. Uočavanje matematičkih struktura potpomaže zaključivanju u stvarnim životnim matematičkim aplikacijama predviđenima ovim konceptualnim okvirom na način da omogućuje učenicima da primjenjuju znanja o situacijama ili problemima u jednom kontekstu na probleme sa sličnom strukturom u drugom kontekstu.

Prepoznavanje funkcionalnih odnosa među količinama

65. U osnovnoj školi učenici se često susreću sa zadacima u kojima trebaju utvrditi određenu količinu, primjerice izračunati koliko brzo treba voziti da bi se za 1 sat i 40 minuta prešla udaljenost od 180

km između Tucsona i Phoenixa. Takvi zadaci imaju konkretno rješenje – da bi se za 1 sat i 40 minuta prešla udaljenost od 180 km, potrebno je voziti brzinom od 108 km na sat.

66. U nekom trenutku učenici počinju razmatrati situacije u kojima su količine promjenjive, odnosno mogu poprimiti raspon vrijednosti. Primjerice, koji je odnos između prijeđene udaljenosti „ d “ u kilometrima i vremena provedenog u vožnji „ t “ u satima ako se vozi konstantnom brzinom od 108 km na sat? Takvi zadaci uvode funkcionalne odnose. U ovom slučaju, odnos izražen jednadžbom „ $d = 108t$ “ proporcionalan je odnos te predstavlja temeljni, a možda i najvažniji primjer općeg znanja.

67. Odnosi između količina mogu se izraziti jednadžbama, grafikonima, tablicama ili verbalnim opisima. Za vrijeme učenja, važno je iz njih izvući ideju same funkcije, kao apstraktni objekt koji oni predstavljaju. Temeljni elementi ovog koncepta su: domena, iz koje se odabiru ulazni podaci, kodomena, u kojoj se nalaze izlazni podaci, te pravilo za dobivanje izlaznih podataka iz ulaznih podataka.

68. *Prepoznavanje funkcionalnih odnosa među varijablama u stvarnim životnim matematičkim aplikacijama predviđenim ovim konceptualnim okvirom potpomaže zaključivanju na način da omogućuje učenicima da se usredotoče na to kako međuovisnost i interakcija među varijablama utječu na situaciju.*

Korištenje matematičkog modeliranja za prikazivanje stvarnog svijeta

69. Modeli predstavljaju konceptualizaciju pojava. Modeli su pojednostavljena stvarnost koja određena obilježja nekog fenomena stavljaju u prvi plan, a druga obilježja aproksimiraju ili zanemaruju. Kao takvi, “svi su modeli pogrešni, ali su neki od njih korisni” (Box i Draper, 1987, str. 424). Korisnost modela proizlazi iz njegove eksplanatorne i/ili predikcijske moći (Weintrop i sur., 2016). U tom smislu, modeli su apstrakcije stvarnosti. Model može predstavljati konceptualizaciju koja se smatra približnom ili radnom hipotezom vezanom uz proučavani fenomen ili može biti riječ o namjernom pojednostavljivanju. Matematički modeli formuliraju se na matematičkom jeziku te koriste širok spektar različitih alata i rezultata (npr. iz aritmetike, algebre, geometrije itd.). Kao takvi, koriste se kao načini preciznog definiranja konceptualizacije ili teorije nekog fenomena, za analiziranje i vrednovanje podataka (Odgovara li model podacima?) te za predviđanje. Modelima se može upravljati – odnosno oni mogu biti izvođeni tijekom vremena ili s različitim početnim podacima kako bi se proizvela simulacija. U tom je slučaju moguće stvarati predikcije, analizirati posljedice te vrednovati prikladnost i točnost modela. Tijekom cijelog procesa modeliranja potrebno je uzeti u obzir parametre iz stvarnog svijeta koji utječu na model i rješenja dobivena korištenjem modela.

70. Računalni (ili računski) modeli pružaju mogućnost testiranja hipoteza, generiranja podataka, uvođenja slučajnosti itd. Matematička pismenost obuhvaća sposobnost razumijevanja, vrednovanja i konstruiranja značenja iz računalnih modela.

71. Korištenje matematičkih modela, kao i modela općenito, potpomaže zaključivanju u stvarnim životnim matematičkim aplikacijama predviđenim ovim konceptualnim okvirom na način da potiče učenike da se usredotoče na najvažnije elemente situacija i tako svedu problem na njegovu suštinu.

Razumijevanje varijacija kao osnove statistike

72. Objašnjavanje varijabilnosti jedan je od ključnih, ako ne i najvažnijih elemenata na kojem se temelji statistika kao disciplina. U današnjem svijetu ljudi se često suočavaju s takvim situacijama jednostavno zanemarujući varijabilnost, što rezultira generalizacijama koje su često varljive, ako ne i pogrešne, te kao takve veoma opasne. Pristranost se, u društvenoznanstvenom smislu, obično javlja zbog neuzimanja u obzir izvora i magnitude varijabilnosti nekog proučavanog svojstva.

73. Statistika se u osnovi odnosi na objašnjavanje ili modeliranje varijacija mjerenih varijancom ili, u slučaju više varijabli, kovarijacijskom matricom. Time se osigurava vjerojatnosno okruženje u kojem se mogu razumjeti različite pojave i donositi važne odluke. Statistika je na mnoge načine potraga za obrascima u izrazito promjenjivom kontekstu – pokušaj pronalaženja jedine odlučujuće „istine“ u velikom mnoštvu slučajnih šumova. „Istina“ je navedena pod navodnicima jer matematika ne može ponuditi prirodu istine, već samo procjenu istine smještene u vjerojatnosni kontekst, popraćenu procjenom pogreške u tom procesu. U konačnici, donositelj odluke ostaje u dilemi jer nikada neće sa sigurnošću znati što je istina. Dobivena procjena u najboljem je slučaju raspon mogućih vrijednosti – primjerice, što je bolji proces, veći je uzorak podataka i uži raspon mogućih vrijednosti, iako se raspon ne može izbjeći. Neki su aspekti toga bili prisutni i u prijašnjim ciklusima PISA istraživanja, no zbog sve većeg značaja, u ovom se konceptualnom okviru stavlja veći naglasak.

74. Razumijevanje varijacija kao središnjeg obilježja statistike potpomaže zaključivanju u stvarnim životnim matematičkim aplikacijama predviđenim ovim konceptualnim okvirom na način da se učenike potiče na korištenje argumenata utemeljenih na podacima uz svijest o ograničenjima zaključaka koji se mogu izvesti.

Rješavanje problema

75. Definicija matematičke pismenosti ističe sposobnost pojedinca da formulira, primjenjuje i tumači (i vrednuje) matematiku. Ova tri glagola, „formulirati“, „primjenjivati“ i „tumačiti“, pružaju korisnu i smislenu strukturu za organiziranje matematičkih procesa koji opisuju što pojedinci čine da bi povezali kontekst problema s matematikom i riješili problem. Matematički zadaci u istraživanju PISA 2021 moći će biti klasificirani ili kao matematičko zaključivanje ili kao jedan od sljedećih triju matematičkih procesa:

- matematičko formuliranje situacija,
- primjena matematičkih koncepata, činjenica, procedura i zaključivanja,
- tumačenje, primjenjivanje i vrednovanje matematičkih rješenja.

76. Donositelji obrazovnih politika i stručnjaci koji su uključeni u svakodnevno obrazovanje učenika trebali bi znati koliko su učinkovito učenici sposobni koristiti svaki od navedenih elemenata u modelu/ ciklusu rješavanja problema. *Formuliranje* ukazuje na to koliko su učinkovito učenici sposobni prepoznati i utvrditi mogućnost korištenja matematike u problemskim situacijama te ponuditi matematičku strukturu potrebnu za formuliranje tog kontekstualiziranog problema u matematički oblik. *Primjena* se odnosi na to koliko su dobro učenici sposobni računati i manipulirati te primjenjivati poznate koncepte i činjenice da bi došli do matematičkog rješenja matematički formuliranog problema. *Tumačenje* (i *vrednovanje*) odnosi se na to koliko su učinkovito učenici sposobni promišljati o matematičkim rješenjima ili zaključcima, tumačiti ih u kontekstu problema iz stvarnog svijeta i utvrditi jesu li rezultati ili zaključci smisleni i/ili korisni. Lakoća s kojom učenici koriste matematiku u rješavanju problema i situacija ovisi o vještinama svojstvenih svim trima procesima, a razumijevanje efikasnosti učenika u svakoj od navedenih kategorija može biti korisno i u političkim raspravama i u odlukama koje se donose na razini učionice.

77. Osim toga, poticanjem učenika da stječu iskustva u procesu rješavanja matematičkih problema uz pomoć alata i postupaka računalnog razmišljanja, učenici se potiču na uvježbavanje vještina predviđanja, promišljanja i uklanjanja pogrešaka (Brennan i Resnick, 2012).

Matematičko formuliranje situacija

78. Riječ *formulirati* u definiciji matematičke pismenosti odnosi se na sposobnost pojedinaca da prepoznaju i utvrde mogućnost korištenja matematike, a zatim da pronađu matematičku strukturu za problem koji je predstavljen u nekom kontekstualiziranom obliku. U procesu matematičkog formuliranja situacija pojedinci utvrđuju otkud mogu „zvuci“ matematiku potrebnu za analiziranje, postavljanje i rješavanje problema. Oni prenose problem iz stvarnog životnog okruženja u domenu matematike dajući mu matematičku strukturu, reprezentacije i specifičnost. Oni donose zaključke i pokušavaju shvatiti ograničenja i pretpostavke u problemu. Konkretno, proces matematičkog formuliranja situacija obuhvaća aktivnosti poput:

- odabira odgovarajućeg modela na popisu⁶
- prepoznavanja matematičkih aspekata problema smještenog u stvarni životni kontekst te identificiranje ključnih varijabli
- prepoznavanja matematičke strukture (uključujući pravilnosti, odnose i obrasce) u problemima ili situacijama
- pojednostavljivanja situacije ili problema kako bi bio prikladan za matematičku analizu (npr. dekompozicija)
- utvrđivanja ograničenja i pretpostavki u matematičkom modeliranju i pojednostavljivanju iz konteksta
- matematičkog prikazivanja situacije uz pomoć odgovarajućih varijabli, simbola, dijagrama i standardnih modela
- prikazivanja problema na drugačiji način uključujući njegovo organiziranje prema matematičkim konceptima i stvaranje ispravnih pretpostavki
- razumijevanja i objašnjavanja odnosa između jezika specifičnog za kontekst problema te simboličkog i formalnog jezika potrebnog za njegovo matematičko predstavljanje
- prevođenja problema na matematički jezik ili prikaz
- prepoznavanja aspekata problema koji odgovaraju poznatim problemima ili matematičkim konceptima, činjenicama ili postupcima
- odabir i korištenje najučinkovitijeg računalnog alata za prikazivanje matematičkog odnosa u kontekstualiziranom problemu
- opisivanje slijeda radnji (korak po korak) za rješavanje problema.

Primjena matematičkih koncepata, činjenica, procedura i zaključivanja

79. Glagol *primjenjivati* u definiciji matematičke pismenosti odnosi se na sposobnost pojedinca da koristi matematičke koncepte, činjenice, procedure i zaključivanje kako bi riješio matematički formulirane probleme i došao do matematičkih zaključaka. U procesu korištenja matematičkih koncepata, činjenica, procedura i zaključivanja u svrhu rješavanja problema pojedinci izvršavaju matematičke postupke potrebne za dolazak do rezultata i pronalaženje matematičkog rješenja (npr. izvođenje aritmetičkih operacija, rješavanje jednadžbi, izvođenje logičkih zaključaka na temelju matematičkih pretpostavki, manipulacije sa simbolima, iščitavanje matematičkih informacija iz tablica i grafikona, prikazivanje i manipuliranje oblicima u prostoru te analiziranje podataka). Oni rade na modelu problemske situacije, utvrđuju pravilnosti, uočavaju veze između matematičkih entiteta te formuliraju

⁶ Ova je aktivnost uključena u popis kako bi se istaknula potreba za razvojem zadataka primjerenih za učenike na dnu skale postignuća.

matematičke argumente. Konkretno, proces primjenjivanja matematičkih koncepata, činjenica, procedura i zaključivanja obuhvaća aktivnosti kao što su:

- izvođenje jednostavnih računskih operacija⁷ **
- izvođenje jednostavnih zaključaka **
- odabir odgovarajuće strategije s popisa strategija **
- razvoj i primjena strategija za pronalaženje matematičkih rješenja
- korištenje matematičkih alata i tehnologije radi pronalaženja točnog ili približnog rješenja
- korištenje matematičkih činjenica, pravila, algoritama i struktura u pronalaženju rješenja
- manipuliranje brojevima, grafičkim i statističkim podacima, algebarskim izrazima i jednadžbama te geometrijskim prikazima
- izrada matematičkih dijagrama, grafikona, simulacija i konstrukcija te iščitavanje matematičkih informacija
- korištenje i mijenjanje različitih reprezentacija u procesu pronalaženja rješenja
- stvaranje generalizacija i pretpostavki na temelju rezultata primjene matematičkih procedura s ciljem pronalaženja rješenja
- promišljanje o matematičkim argumentima te objašnjavanje i obrazlaganje matematičkih rezultata
- procjenjivanje važnosti proučavanih (ili predloženih) obrazaca i pravilnosti u podacima.

Tumačenje, primjena i vrednovanje matematičkih rezultata

80. Glagol *tumačiti* (i *vrednovati*) korišten u definiciji matematičke pismenosti usmjeren je na sposobnost pojedinca da promišlja o matematičkim rješenjima, rezultatima ili zaključcima te ih tumači u kontekstu problema iz stvarnog života zbog čega je taj proces i pokrenut. To uključuje „prevođenje“ matematičkih rješenja ili zaključaka natrag u kontekst problema te utvrđivanje jesu li rezultati logični te imaju li smisla u kontekstu problema. *Tumačenje, primjena i vrednovanje matematičkih rezultata* obuhvaća i ‘tumačenje’ i ‘vrednovanje’ elemenata ciklusa matematičkog modeliranja. Od pojedinaca se može tražiti da u ovom procesu stvaraju i komuniciraju objašnjenja i argumente u kontekstu problema promišljajući i o procesu modeliranja i o njegovim rezultatima. Konkretno, proces tumačenja, primjene i vrednovanja matematičkih rezultata obuhvaća aktivnosti kao što su:

- tumačenje informacija prikazanih u grafičkom obliku i/ili dijagramima⁸ **
- vrednovanje matematičkog rezultata s obzirom na njegov kontekst**
- tumačenje matematičkog rezultata u stvarnom životnom kontekstu
- procjenjivanje smislenosti matematičkog rješenja u kontekstu stvarnog životnog problema
- razumijevanje načina na koji stvarni život utječe na ishode i rezultate matematičkih postupaka ili modela kako bi se donosile kontekstualne prosudbe o tome kako prilagoditi ili primijeniti rezultate

⁷ Aktivnosti označene zvjezdicama (**) uključene su u popis kako bi se istaknula potreba za razvojem zadatka primjerenih za učenike koji se nalaze na dnu skale postignuća.

⁸ Aktivnosti označene zvjezdicama (**) uključene su u popis kako bi se istaknula potreba za razvojem zadatka primjerenih za učenike na dnu skale postignuća.

- objašnjavanje zašto neki matematički rezultat ili zaključak ima ili nema smisla s obzirom na kontekst problema
- razumijevanje opsega i ograničenja matematičkih koncepata i rješenja
- kritičko analiziranje i utvrđivanje ograničenja modela korištenog u rješavanju problema
- korištenje matematičkog i računalnog razmišljanja za predviđanje, potkrepljivanje argumenata, testiranje i usporedbu predloženih rješenja.

Matematičko sadržajno znanje

81. Razumijevanje matematičkih sadržaja – i sposobnost primjene takvog znanja prilikom rješavanja važnih kontekstualnih problema – važno je za građane u današnjem svijetu. Drugim riječima, matematičko zaključivanje i rješavanje problema te tumačenje situacija u osobnom, profesionalnom, društvenom i znanstvenom kontekstu zahtijeva oslanjanje na određeno matematičko znanje i razumijevanje.

82. S obzirom na to da je PISA-in cilj vrednovati matematičku pismenost, predložena je organizacijska struktura za matematičko sadržajno znanje temeljena na matematičkim fenomenima koji se nalaze u podlozi širih kategorija problema. Takva organizacija sadržaja nije nova – ona je već opisana u dvije poznate publikacije: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) i *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994).

83. Sljedeće sadržajne kategorije (prethodno korištene 2012. godine) ponovno se koriste u istraživanju PISA 2021 kako bi istovremeno odražavale matematičke fenomene na kojima se temelje šire kategorije problema, opću strukturu matematike te glavna područja tipičnih školskih kurikula. Ove četiri kategorije opisuju raspon matematičkih sadržaja koji se nalaze u središtu matematičke discipline te ilustriraju široka sadržajna područja koja se koriste u zadacima u istraživanju PISA 2021 (među kojima će biti i zadaci iz istraživanja PISA-D koji su primjereniji sposobnostima učenika na dnu skale postignuća):

- Promjena i odnosi
- Prostor i oblik
- Količina
- Neizvjesnost i podaci.

84. Uz pomoć ovih četiriju kategorija, matematičko se područje može organizirati na način kojim se osigurava pokrivenost cijelog područja u zadacima i usredotočenost na važne matematičke fenomene uz istovremeno izbjegavanje predetaljne klasifikacije koja bi onemogućila analizu složenih i izazovnih matematičkih problema temeljenih na stvarnim situacijama.

85. Kategorizacija prema sadržajnim kategorijama važna je za razvoj i odabir zadataka i izvješćivanje rezultata istraživanja, no važno je napomenuti da će neki od zadataka potencijalno moći biti istovremeno klasificirani u više sadržajnih kategorija.

86. Nacionalni školski matematički kurikuli obično su organizirani prema sadržajnim područjima (najčešće brojevi, algebra, funkcije, geometrija te rad s podacima) i detaljnim popisima tema kako bi se mogla definirati jasna očekivanja. Cilj takvih kurikula jest opremiti učenike znanjima i vještinama potrebnima za rješavanje istih matematičkih fenomena na temelju kojih je organiziran i sadržaj u PISA-i. Zbog tog je razloga opseg sadržaja prema PISA-inu načinu organiziranja tijesno usklađen sa sadržajem koji se obično nalazi u matematičkim kurikulumima različitih zemalja. Ovaj konceptualni okvir navodi popise odgovarajućih tema za ispitivanje matematičke pismenosti petnaestogodišnjih učenika koje su odabrane na temelju analize nacionalnih standarda iz jedanaest zemalja.

87. Široke matematičke sadržajne kategorije i konkretne teme primjerene za petnaestogodišnje učenike opisane u ovom odjeljku odražavaju razinu i širinu sadržaja koji bi bio prikladan za uključivanje u istraživanje PISA 2021. Za svaku od sadržajnih kategorija naveden je opis i njezina relevantnost u promišljanju i rješavanju smislenih problema, nakon čega su konkretnije definirane vrste sadržaja prikladne za uključivanje u ispitivanje matematičke pismenosti petnaestogodišnjih učenika i mladih izvan školskog sustava.

88. U istraživanju PISA 2021 poseban se naglasak stavlja na četiri odabrane teme koje nisu nove u matematičkim sadržajnim kategorijama, već zaslužuju poseban naglasak unutar postojećih sadržajnih kategorija. Mahajan i sur. („PISA Mathematics 2021“, 2016) ove četiri teme ne predstavljaju samo kao situacije s kojima se odrasle osobe često susreću u životu, već i kao područja matematike koja postaju neophodna u novim područjima ekonomije poput visokotehnološke proizvodnje itd. Te se četiri teme odnose se na fenomen rasta, geometrijske aproksimacije, računalne simulacije te uvjetno odlučivanje. Navedene teme trebale bi se koristiti u zadacima na način koji je primjeren iskustvima petnaestogodišnjaka. O svakoj od ovih tema detaljnije se raspravlja u opisima sljedećih sadržajnih kategorija:

- Fenomen rasta (promjena i odnosi)
- Geometrijska aproksimacija (prostor i oblik)
- Računalne simulacije (količina)
- Uvjetno odlučivanje (neizvjesnost i podaci).

Promjena i odnosi

89. U prirodnom i umjetnom svijetu postoji mnoštvo privremenih i stalnih odnosa među objektima i okolnostima, pri čemu se promjene događaju unutar sustava međusobno povezanih objekata ili u okolnostima u kojima elementi utječu jedni na druge. U mnogim slučajevima takve se promjene događaju tijekom vremena, dok su u drugim slučajevima promjene u jednom objektu ili količini povezane s promjenama u drugom. Neke od tih situacija uključuju jednokratne promjene, a druge se događaju kontinuirano. Neki su odnosi stalne ili nepromjenjive prirode. Biti pismen u području promjena i odnosa znači razumjeti osnovne vrste promjena te prepoznati kad se one događaju kako bi se mogli koristiti matematički modeli prikladni za opisivanje i predviđanje promjena. Matematički gledano, to podrazumijeva modeliranje promjena i odnosa odgovarajućim funkcijama i jednadžbama, kao i stvaranje i tumačenje simboličkih i grafičkih prikaza odnosa te pretvaranje iz jednog prikaza u drugi.

90. Promjene i odnosi vidljivi su u različitim okruženjima kao što je rast organizama, glazba, promjena godišnjih doba, promjene vremena, razine zaposlenosti i gospodarski uvjeti. Aspekti tradicionalnih matematičkih sadržaja poput funkcija i algebre uključujući i algebarske izraze, jednadžbe i nejednadžbe te tabelarne i grafičke prikaze ključni su u opisivanju, modeliranju i tumačenju fenomena promjene. Računalni alati omogućuju vizualiziranje i interakciju s promjenom i odnosima. Sposobnost prepoznavanja kako i kada neki računalni uređaj može proširiti i nadopuniti matematičke koncepte važna je vještina računalnog razmišljanja.

91. Prikazi podataka i odnosa opisanih uz pomoć statistike također se koriste za prikazivanje i tumačenje promjena i odnosa, dok je temeljno znanje o brojevima i jedinicama nužno za definiranje i tumačenje promjena i odnosa. Geometrijskim mjerenjem dobivaju se zanimljivi odnosi poput načina na koji promjene u opsegu skupine oblika mogu biti povezane s promjenama u površini, ili pak odnosi između duljina stranica trokuta.

92. Fenomen rasta – razumijevanje opasnosti od pandemije gripe i izbivanja bakterijskih bolesti te opasnost od klimatskih promjena zahtijeva od pojedinaca da ne razmišljaju samo u smislu linearnih

odnosa, već i da prepoznaju da su za takve fenomene potrebni nelinearni (često eksponencijalni i drugi) modeli. Linearni su odnosi česti i lako ih je prepoznati i razumjeti, no pretpostavljanje linearnosti ponekad može biti i opasno. Procjena prijedene udaljenosti u različitim vremenskim razdobljima pri određenoj brzini primjer je linearnosti s kojim se vjerojatno svi susreću. Primjena linearnog pristupa dovodi do razumne procjene dokle god brzina ostaje relativno konstantna. No kod epidemije gripe, primjerice, primjenom linearnog pristupa u velikoj bi se mjeri podcijenio broj oboljelih tijekom 5 dana nakon početnog izbijanja epidemije. U ovom slučaju ključnu ulogu ima temeljeno razumijevanje nelinearnog (uključujući kvadratnog i eksponencijalnog) rasta te koliko se brzo zaraza može širiti s obzirom na to da se brzina promjene povećava iz dana u dan. Širenje zaraze Zika virusom dobar je primjer eksponencijalnog rasta – njegovo je prepoznavanje pomoglo liječnicima u razumijevanju neposredne prijetnje i potrebe za brzim djelovanjem.

93. Identificiranje fenomena rasta kao ključne komponente sadržajne kategorije „Promjena i odnosi“ ne znači da se očekuje da su učenici koji sudjeluju u istraživanju trebali učiti eksponencijalnu funkciju. U zadacima se sigurno neće tražiti znanje o eksponencijalnoj funkciji. Umjesto toga, očekuje se da će u nekim zadacima učenici trebati prepoznati: (a) da nije svaki rast linearan, (b) da nelinearan rast ima posebne i značajne implikacije na to kako shvaćamo određene situacije, te (c) intuitivno značenje „eksponencijalnog rasta“ kao izuzetno brze stope rasta. Primjerice, kod potresa svaki rast od jedne jedinice na Richterovoj ljestvici ne znači proporcionalni rast njezinog učinka, već rast od 10, 100 i 1000 puta itd.

Prostor i oblik

94. Kategorija „Prostor i oblik“ obuhvaća širok spektar fenomena s kojima se susrećemo u našem vizualnom i fizičkom svijetu: uzorke, svojstva objekata, položaje i orijentacije, prikaze objekata, kodiranje i dekodiranje vizualnih informacija, navigaciju i dinamičnu interakciju sa stvarnim oblicima i prikazima, kretanje, premještanje i sposobnost predviđanja djelovanja u prostoru. Iako geometrija služi kao temelj kategorije „Prostor i oblik“, ta se kategorija po sadržaju, značenju i metodama proteže izvan tradicionalne geometrije s obzirom na to da se oslanja na elemente drugih matematičkih područja kao što je prostorna vizualizacija, mjerenje i algebra. Na primjer, oblici se mogu mijenjati i točka se može pomicati duž krivulje, što zahtijeva koncepte funkcije. Središnje mjesto u ovoj kategoriji zauzimaju formule za mjerenje. Ova kategorija uključuje prepoznavanje, manipulaciju i interpretaciju oblika u okruženjima koji zahtijevaju korištenje različitih alata, od softvera dinamične geometrije do Globalnog položajnog sustava (GPS) i softvera za strojno učenje.

95. PISA pretpostavlja da je razumijevanje temeljnih koncepata i vještina vezanih uz područje prostora i oblika važno za razvoj matematičke pismenosti. Matematička pismenost vezana uz kategoriju „Prostor i oblik“ obuhvaća niz aktivnosti poput razumijevanja perspektive (npr. kod umjetničkih slika), izrade i čitanja karata, transformiranja oblika sa i bez tehnologije, tumačenja pogleda na trodimenzionalne prikaze iz različitih perspektiva te stvaranje različitih prikaza oblika.

96. Geometrijske aproksimacije: Današnji svijet vrvi oblicima koji ne slijede standardne obrasce ravnornosti ili simetričnosti. S obzirom na to da se na nepravilnosti ne mogu primijeniti jednostavne formule, teško nam je razumjeti ono što vidimo i utvrditi površinu ili volumen dobivenih struktura. Na primjer, da bi se utvrdila potrebna količina tepiha za neku zgradu u kojoj stanovi imaju oštre kutove i uske krivulje potrebno je koristiti drugačiji pristup nego što bi to bio slučaj s uobičajenim pravokutnim prostorijama.

97. Identificiranje geometrijske aproksimacije kao ključne komponente sadržajne kategorije „Prostor i oblik“ ukazuje na to da bi učenici trebali biti sposobni primijeniti svoje razumijevanje o tradicionalnim fenomenima u području prostora i oblika u nizu različitih situacija.

Količina

98. Pojam količine možda je i najrašireniji i najnužniji matematički aspekt života i funkcioniranja u našem svijetu. On obuhvaća kvantifikaciju svojstava objekata, odnosa, situacija i entiteta u svijetu, razumijevanje različitih prikaza takvih kvantifikacija te donošenje prosudbi o interpretacijama i argumentima temeljenih na količini. Kvantifikacija svijeta podrazumijeva razumijevanje mjera, brojeva, magnituda, jedinica, pokazatelja, relativne veličine te numeričkih trendova i uzoraka. Aspekti kvantitativnog rasuđivanja – poput osjećaja za brojeve, višestrukog prikazivanja brojeva, računanja s lakoćom, mentalnog računanja te procjene i vrednovanja logičnosti rezultata – temelj su matematičke pismenosti vezane uz područje količine.

99. Kvantifikacija je glavna metoda za opisivanje i mjerenje širokog spektra obilježja različitih aspekata svijeta. Ona omogućuje modeliranje situacija, istraživanje promjena i odnosa, opisivanje i manipuliranje prostorom i oblicima, organiziranje i interpretiranje podataka te mjerenje i procjenu nesigurnosti. Matematička pismenost vezana uz područje količine podrazumijeva primjenu znanja o brojevima i operacija s brojevima u širokom spektru različitih okruženja.

100. Računalne simulacije: U matematici i statistici postoje problemi koje nije lako riješiti zbog toga što zahtijevaju kompleksnu matematiku i uključuju velik broj čimbenika koji djeluju unutar istog sustava ili zbog etičkih pitanja vezanih uz utjecaj na živa bića ili njihovu okolinu. Danas se takvim problemima sve češće pristupa uz pomoć računalnih simulacija temeljenih na algoritmima. U primjeru ispitne cjeline *Simulacija štednje* učenici koriste simulator štednje kao alat koji im pomaže u donošenju odluke. Računalni simulator izvršava računske operacije, što učenicima omogućava da planiraju, predviđaju i rješavaju probleme temeljene na varijablama koje mogu kontrolirati.

101. Identifikacija računalnih simulacija kao ključne komponente sadržajne kategorije „Količina“ upućuje na to da u kontekstu ispitivanja matematičke pismenosti putem računala u istraživanju PISA 2021 postoji široka kategorija kompleksnih problema poput budžetiranja i planiranja koje učenici mogu analizirati s obzirom na varijable problema služeći se računalnim simulacijama u sklopu zadatka.

Neizvjesnost i podaci

102. U znanosti, tehnologiji i svakodnevnom životu neizbježne su varijacije i neizvjesnost koja ih prati. Riječ je o fenomenu koji je u središtu teorije vjerojatnosti i statistike. Sadržajna kategorija „Neizvjesnost i podaci“ obuhvaća prepoznavanje varijacija u stvarnom svijetu uključujući osjećaj za kvantifikaciju tih varijacija, kao i prepoznavanje neizvjesnosti i pogreške u zaključcima. Ona također uključuje stvaranje, tumačenje i vrednovanje zaključaka izvedenih u situacijama u kojima je prisutna neizvjesnost. Prikazivanje i tumačenje podataka ključni su koncepti unutar ove kategorije (Moore, 1997).

103. Ekonomska predviđanja, rezultati anketa, vremenske prognoze – sve to uključuje mjere varijacije i neizvjesnosti. Varijacije su prisutne i u procesima proizvodnje i rezultatima testova i anketa, a vjerojatnosti čine temelj mnogih rekreativnih aktivnosti kojima se bavimo. Tradicionalna kurikularna područja koja se odnose na vjerojatnosti i statistiku omogućuju formalno opisivanje, modeliranje i tumačenje određene skupine fenomena u kojima varijacije igraju ključnu ulogu te izvođenje odgovarajućih stohastičkih zaključaka. Uz to, znanje o brojevima i različitim aspektima algebre poput grafova i simboličkih prikaza doprinose rješavanju problema unutar ove sadržajne kategorije.

104. Uvjetovano odlučivanje: Statistika omogućuje mjeru varijacije karakterističnu za većinu onoga s čime se ljudi susreću u svakodnevnom životu. Ta mjera je varijanca. U slučajevima kad postoji više varijabli, u svakoj od tih varijabli postoje varijacije, kao i kovarijacije koje obilježavaju odnose među varijablama. Takvi međuođnosni često mogu biti prikazani u dvosmjernim tablicama na temelju kojih

se mogu donositi uvjetne odluke (zaključci). Dvosmjerna tablica za dvije dihotomne varijable (tj. dvije varijable od kojih svaka ima dvije mogućnosti) sadrži četiri kombinacije. Dvosmjerna tablica (analiza situacije) nudi tri tipa postotaka koji zatim nude procjene odgovarajućih vjerojatnosti. One uključuju vjerojatnosti četiriju zajedničkih događaja, dva marginalna, te uvjetne vjerojatnosti koje imaju ključnu ulogu u onome što nazivamo uvjetnim odlučivanjem. Od učenika se očekuje da će u PISA-inim zadacima biti sposobni iščitati relevantne podatke iz tablice i razumjeti podatke koje iščitavaju.

105. U primjeru ispitne cjeline *Odluka o kupnji* učenicima su sažeto prikazane ocjene koje su kupci dali jednom proizvodu u internetskoj trgovini. Uz to, učenicima je prikazana detaljnija analiza recenzija kupaca koji su dali ocjenu od jedne ili dviju zvjezdica. Ti su podaci prikazani u dvojsmernoj tablici, a učenici trebaju pokazati razumijevanje različitih procjena vjerojatnosti koje nudi dvosmjerna tablica.

106. Identifikacija uvjetnog odlučivanja kao ključne komponente sadržajne kategorije „Neizvjesnost i podaci“ ukazuje na to da bi učenici trebali biti sposobni prepoznati kako formuliranje analize u modelu utječe na izvođenje zaključaka te da različite pretpostavke/odnosi mogu rezultirati različitim zaključcima.

Sadržajne teme u ispitivanju matematičke pismenosti petnaestogodišnjih učenika

107. Uspješno razumijevanje i rješavanje kontekstualiziranih problema koji se odnose na promjenu i odnose, količinu, prostor i oblike te neizvjesnost i podatke zahtijeva primjenu matematičkih kocepata, procedura, činjenica i alata na odgovarajućoj razini kompleksnosti i sofisticiranosti. U ispitivanju matematičke pismenosti PISA nastoji obuhvatiti različite razine i vrste matematike primjerene za petnaestogodišnje učenike na putu da postanu konstruktivni, angažirani i promišljajući građani 21. stoljeća sposobni donositi dobro utemeljene prosudbe i odluke. Važno je napomenuti da PISA, iako nije istraživanje usmjereno na kurikulum, nastoji obuhvatiti matematiku koju su učenici vjerojatno imali priliku učiti do svoje petnaeste godine.

108. Da bi se razvilo istraživanje koje je s jedne strane okrenuto prema budućnosti, a s druge strane vodi računa o matematici koju su petnaestogodišnji učenici vjerojatno imali priliku učiti, u sklopu razvoja matematičkog konceptualnog okvira za istraživanje PISA 2012 provedene su analize očekivanih ishoda učenja u jedanaest zemalja kako bi se utvrdilo što učenici uče u različitim dijelovima svijeta i što zemlje smatraju realnom i važnom pripremom učenika koji se bliže ulasku na tržište rada ili nastavku školovanja na višim razinama obrazovanja. Na temelju zajedničkih obilježja utvrđenih u tim analizama i procjena matematičkih stručnjaka u nastavku teksta opisani su sadržaji koji su procijenjeni prikladnima za uključivanje u ispitivanje matematičke pismenosti petnaestogodišnjih učenika u istraživanju PISA 2012, a koji se nastavljaju i dalje koristiti u istraživanju PISA 2021.

109. U istraživanju PISA 2021 dodane su još četiri teme. Donji popis ne sadrži sve teme, već služi samo kao primjer tema obuhvaćenih istraživanjem PISA 2021:

- *Fenomen rasta*: različite vrste linearnog i nelinearnog rasta
- *Geometrijska aproksimacija*: procjena karakteristika i svojstava nepravilnih ili nepoznatih oblika i objekata njihovim raščlanjivanjem u poznatije oblike i objekte za koje postoje formule i alati
- *Računalne simulacije*: istraživanje situacija (koje mogu uključivati budžetiranje, planiranje, distribuciju stanovništva, širenje bolesti, eksperimentalnu vjerojatnost, modeliranje vremena reakcije itd.) s obzirom na varijable i njihov učinak na ishod
- *Uvjetno odlučivanje*: korištenje osnovnih načela kombinatorike i razumijevanja međuodnosa među varijablama s ciljem intepretiranja situacija i predviđanja
- *Funkcije*: koncept funkcije, s naglaskom na linearne funkcije, svojstva funkcija te njihovi različiti opisi i prikazi. Uobičajeni prikazi uključuju verbalne, simboličke, tabelarne i grafičke prikaze.

- *Algebarski izrazi*: verbalna interpretacija i manipulacija algebarskim izrazima uključujući brojeve, simbole, aritmetičke operacije, potencije i jednostavne korijene
- *Jednadžbe i nejednadžbe*: linearne i srodne jednadžbe i nejednadžbe, jednostavne jednadžbe drugog reda te analitičke i neanalitičke metode rješavanja
- *Koordinatni sustavi*: prikazi i opisi podataka, položaja i odnosa
- *Odnosi unutar geometrijskih objekata* i među geometrijskim objektima u dvije i tri dimenzije: statični odnosi poput algebarskih veza između različitih elemenata likova (npr. Pitagorin poučak za definiranje odnosa između duljina stranica pravokutnog trokuta), relativni položaj, sličnost i sukladnost te dinamični odnosi koji uključuju transformaciju i gibanje objekata, kao i podudarnosti između dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata
- *Mjerenje*: kvantifikacija svojstava oblika i objekata poput mjera kutova, udaljenosti, duljine, opsega, polumjera, površine i obujma
- *Brojevi i jedinice*: koncepti, prikazi brojeva i brojevni sustavi (uključujući pretvaranje između brojevni sustava), uključujući svojstva cijelih i racionalnih brojeva te količine i jedinice koje se odnose na fenomene poput vremena, novca, težine, temperature, udaljenosti, površine i obujma, te izvedene količine i njihov brojčani opis
- *Aritmetičke operacije*: priroda i svojstva tih operacija i notacijske konvencije
- *Postoci, omjeri i proporcije*: brojčani opisi relativne veličine i primjena proporcija i proporcionalnog zaključivanja u rješavanju problema
- *Načela brojenja*: jednostavne kombinacije
- *Procjene*: svrhovito procjenjivanje količina i brojčanih izraza uključujući značajne znamenke i zaokruživanje
- *Prikupljanje podataka, prikazivanje i interpretiranje*: priroda, porijeklo i prikupljanje različitih vrsta podataka te različiti načini njihova analiziranja, prikazivanja i interpretiranja
- *Varijabilnost podataka i njezino opisivanje*: koncepti kao što su varijabilnost, distribucija i centralna tendencija skupova podataka, načini njihova opisivanja i interpretiranja u kvantitativnom i grafičkom smislu
- *Uzorci i uzorkovanje*: koncept uzorkovanja i uzorkovanja iz skupova podataka, uključujući jednostavno zaključivanje na temelju svojstava uzoraka uključujući točnost i preciznost
- *Slučajnost i vjerojatnosti*: pojam slučajnih događaja, slučajna varijacija i njezino prikazivanje, vjerojatnost i frekvencije događaja te osnovni aspekti koncepta vjerojatnosti i uvjetne vjerojatnosti.

Konteksti zadataka i odabrane vještine 21. stoljeća

110. Definicija matematičke pismenosti upućuje na dvije stvari koje valja uzeti u obzir prilikom razvoja PISA-inih zadataka. Prvo, definicija jasno upućuje na to da se matematička pismenost odvija u stvarnim životnim kontekstima. Drugo, matematička pismenost pomaže pojedincu da prepozna ulogu koju matematika ima u svijetu i da donosi dobro utemeljene odluke i prosudbe koje su mu potrebne kao konstruktivnom, angažiranom i promišljajućem građaninu 21. stoljeća. U ovom se odjeljku raspravlja o tome kako stvarni životni konteksti i vještine 21. stoljeća utječu na razvoj zadataka.

111. Stvarnoživotna priroda matematičke pismenosti donosi za PISA-u određene izazove. Stvarni životni konteksti obuhvaćaju informacije, a te se informacije prenose uz pomoć teksta. Kvantitativne i statističke informacije koje cirkuliraju svijetom i dopiru do građana prenose se putem tiskanog ili

govornog teksta, primjerice članaka u medijima, priopćenja za medije, blogova, društvenih mreža, oglasa itd. Takav tiskani i govoreni tekst koristi se za iznošenje poruka ili argumenata koji mogu ili ne moraju sadržavati brojeve i/ili grafikone. Tekst je glavni alat za komuniciranje konteksta, iz čega proizlazi da je vještina razumijevanja teksta osnovni preduvjet za uspjeh u matematičkoj pismenosti. To predstavlja priličan izazov za razvoj zadataka u PISA-i. S jedne strane, test mora prenositi društveno značajne kvantitativne poruke putem bogatog teksta. S druge strane, komparativna priroda testa, različiti jezici na koji se test prevodi te različite razine razumijevanja teksta među petnaestogodišnjim ispitanicima nameću određena ograničenja vezana uz bogatstvo teksta koji bi se realno mogao koristiti. O ovom se izazovu detaljnije raspravlja u odjeljku posvećenom razvoju zadataka.

Konteksti

112. Činjenica da se matematika koristi u rješavanju problema smještenih u određeni kontekst važan je aspekt matematičke pismenosti. Kontekst je aspekt svijeta pojedinca u kojem su smješteni problemi. Odabir odgovarajućih matematičkih strategija i prikaza često ovisi o kontekstu u kojem se javlja problem, što znači da prilikom razvoja modela postoji potreba za korištenjem znanja o stvarnom životnom kontekstu. Sposobnost rada unutar konteksta postavlja dodatne zahtjeve za pojedinca koji rješava problem (vidi Watson i Callingham, 2003 za nalaze o statistici). Za PISA-u je važno da se koristi širok spektar različitih konteksta kako bi se stvorila mogućnost povezivanja s najširim mogućim rasponom različitih interesa pojedinaca te nizom različitih situacija s kojima se susreću pojedinci u 21. stoljeću.

113. S obzirom na broj zemalja sudionica u istraživanju PISA 2021, a time i sve veći broj ispitanika iz zemalja s niskim i srednjim dohotkom, kao i na mogućnost sudjelovanja petnaestogodišnjaka izvan školskog sustava, važno je da se u razvoju zadataka vodi računa o tome da konteksti korišteni u zadacima budu prikladni za širok raspon ispitanika. U tom je pogledu važno i da količina teksta koju je potrebno pročitati u zadacima ostane umjerena kako bi se zadacima i dalje ispitivala matematička pismenost.

114. Konceptualni okvir matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 zadržao je četiri kategorije konteksta iz konceptualnog okvira istraživanja PISA 2012 koji će se koristiti u razvoju zadataka. Važno je istaknuti da, iako će navedeni konteksti biti korišteni u razvoju zadataka, ne očekuje se da će rezultati biti izvješćivani s obzirom na kontekste.

115. **Osobni** – problemi klasificirani u kategoriju osobnih konteksta usmjereni su na aktivnosti pojedinca, njegove obitelji i vršnjaka. Konteksti koji se mogu smatrati osobnima obuhvaćaju kontekste koji se odnose na, primjerice, pripremu hrane, kupovanje, igru, osobno zdravlje, osobni prijevoz, razonodu, sport, putovanja, osobno planiranje te osobne financije.

116. **Profesionalni** – problemi klasificirani u kategoriju profesionalnog konteksta usmjereni su na svijet rada. Zadaci klasificirani kao profesionalni mogu obuhvaćati stvari kao što su, primjerice, mjerenje, formiranje cijena i narudžba građevinskog materijala, obračun plaće/računovodstveni poslovi, kontrola kvalitete, planiranje/popisivanje inventara, dizajn/arhitektura te poslovno odlučivanje sa ili bez odgovarajuće tehnologije. Profesionalni konteksti mogu se odnositi na sve vrste rada, od nekvalificiranog do stručnih poslova na najvišim razinama, iako bi zadaci u PISA istraživanju trebali biti primjereni za petnaestogodišnje učenike.

117. **Društveni** – problemi klasificirani u kategoriju društvenih konteksta usmjereni su na zajednicu (lokalnu, nacionalnu ili globalnu). Oni mogu obuhvaćati, primjerice, stvari poput izbornog sustava, javnog prijevoza, javne uprave, javne politike, demografije, oglašavanja, zdravstva, zabavnih događaja, nacionalne statistike i ekonomije. Iako pojedinci sudjeluju u svim navedenim kontekstima i na osobnoj razini, fokus problema u kategoriji društvenih konteksta jest na perspektivi zajednice.

118. **Znanstveni** – problemi klasificirani u kategoriju znanstvenih konteksta odnose se na primjenu matematike u prirodnom svijetu te na pitanja i teme vezane uz znanost i tehnologiju. Konkretni konteksti mogu obuhvaćati, primjerice, područja kao što su vrijeme ili klima, ekologija, medicina, astronomija, genetika, mjerenje, kao i sam svijet matematike. Čisti matematički zadaci, u kojima svi elementi pripadaju svijetu matematike, mogu se svrstati u kategoriju znanstvenih konteksta.

119. PISA zadaci organizirani su u ispitne cjeline sa zajedničkim polaznim tekstom, zbog čega svi zadaci unutar jedne ispitne cjeline obično imaju isti kontekst. No, postoje i iznimke. Primjerice, u jednom se zadatku polazni sadržaj može razmatrati iz osobnog stajališta, a u drugom iz društvenog. U slučaju kad neki zadatak obuhvaća isključivo matematičke konstrukte i nije povezan s kontekstualnim elementima ispitne cjeline u kojoj se nalazi, bit će mu dodijeljen kontekst cjeline u kojoj se nalazi. U rijetkim slučajevima kad ispitna cjelina obuhvaća isključivo matematičke konstrukte i nije povezana ni sa kojim drugim kontekstom osim matematike, ta će cjelina biti klasificirana u kategoriju znanstvenih konteksta.

120. Kategorije konteksta služe kao temelj za odabir kombinacije konteksta u zadacima te osiguravaju da testom budu obuhvaćene različite primjene matematike, od svakodnevne osobne primjene do primjene u znanstvene svrhe vezano uz globalne probleme. Uz to, važno je da svaka kategorija konteksta bude zastupljena u zadacima širokog raspona težine. S obzirom na to da je glavna svrha kategorija konteksta ispitati znanja i vještine učenika u različitim problemskim situacijama, svaka od kategorija trebala bi značajno doprinijeti mjerenju matematičke pismenosti. Težina zadataka u kojima je zastupljena jedna kategorija konteksta ne bi smjela biti veća ili manja u odnosu na težinu zadataka u kojima je zastupljena neka druga kategorija konteksta.

121. Prilikom utvrđivanja relevantnosti konteksta važno je voditi računa o tome da je svrha ovog istraživanja ispitati primjenu matematičkog sadržajnog znanja i vještina koje su učenici usvojili do svoje petnaeste godine. Iz tog se razloga konteksti zadataka odabiru prema relevantnosti s obzirom na interese učenika, njihov život te izazove s kojima će se susretati kad postanu konstruktivni, zainteresirani i promišljajući građani. Nacionalni voditelji PISA istraživanja iz zemalja sudionica uključeni su u procjenjivanje stupnja takve relevantnosti.

Vještine 21. stoljeća

122. U svijetu postoji sve veći interes za tzv. vještine 21. stoljeća i mogućnost njihova uključivanja u obrazovni sustav. OECD je objavio publikaciju usmjerenu upravo na takve vještine te je sponzorirao istraživački projekt pod nazivom *The Future of Education and Skills: An OECD 2030 Framework*. U toj međunarodnoj studiji o kurikulumima i integraciji vještina 21. stoljeća u kurikule sudjeluje oko 25 zemalja. Glavni cilj projekta jest utvrditi kako bi mogao izgledati kurikulum u budućnosti, s početnim fokusom na matematiku i tjelesni odgoj.

123. U posljednjih petnaestak godina određenim publikacijama pokušavalo se doprinijeti boljem razumijevanju u raspravama i razmatranjima o vještinama 21. stoljeća. Publikacija *PISA 2021 Mathematics: A Broadened Perspective* donosi sažetak ključnih izvješća i konceptualizacija vještina 21. stoljeća. Nakon pažljive analize tih publikacija, autori sugeriraju da postoje snažni argumenti koji idu u prilog integraciji specifičnih vještina 21. stoljeća u određene discipline. Primjerice, poučavanje učenika u školi kako iznositi smislene argumente uz odgovarajuće potkrepljenje postat će sve važnije. Argumenti koji se iznose trebali bi biti matematički točni, temeljeni na čvrstoj teoriji te dovoljno snažni da izdrže kritike, a opet, kadgod je moguće, da izbjegavaju pozivanje na autoritete (npr. 'Tako piše na internetu'). To je dio temeljne kompetencije donošenja samostalnih prosudbi i preuzimanja odgovornosti za njih (OECD, 2005). U društvenom kontekstu nije dovoljno biti u pravu, već treba biti sposoban i spreman iznositi i braniti argumente. Učenje matematike, sa svojom jasnoćom konteksta

i čvrstim naglaskom na logično zaključivanje i odgovarajuću razinu rigoroznosti, savršena je prilika za uvježbavanje i razvijanje sposobnosti za ovu vrstu argumentacije.

124. Slično tome, u današnje vrijeme važno je opremiti učenike alatima kojima se mogu služiti kako bi se branili od laži i zaključaka koji su naizgled temeljeni na matematičkom zaključivanju. Često je dovoljna samo određena razina sposobnosti logičkog zaključivanja – laž obično skriva određenu dozu proturječja. Obraćanje pažnje na moguća proturječja može se lako razvijati u sklopu kvalitetne nastave matematike.

125. Primjenom logike u pronalaženju presjeka između generičkih vještina 21. stoljeća i srodnih, ali predmetno specifičnih vještina koje su sastavni dio nastave tog predmetnog područja identificirano je sljedećih osam vještina 21. stoljeća koje bi trebale biti integrirane u konceptualni okvir istraživanja PISA 2021:

- kritičko razmišljanje
- kreativnost
- istraživanje i propitivanje
- samousmjeravanje, inicijativnost i ustrajnost
- korištenje informacija
- sustavno razmišljanje
- komunikacija
- refleksija.

ISPITIVANJE MATEMATIČKE PISMENOSTI

126. U ovom odjeljku opisan je pristup korišten u implementaciji različitih elemenata konceptualnog okvira istraživanja PISA 2021 opisanih u prethodnim odjeljcima. To obuhvaća strukturu matematičke komponente PISA istraživanja, poželjnu distribuciju bodova prema matematičkom zaključivanju i procesima rješavanja problema; distribuciju bodova po sadržajnim područjima; razmatranje raspona težine zadataka; strukturu instrumenata; ulogu ispitivanja matematičke pismenosti putem računala; dizajn ispitnih pitanja te izvještavanje o razinama matematičke pismenosti.

Struktura ispitivanja matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021

127. U skladu s definicijom matematičke pismenosti, zadaci korišteni u svim instrumentima u PISA istraživanju smješteni su u kontekst. Kao što je već opisano, zadaci uključuju primjenu ključnih matematičkih koncepata, znanja, razumijevanja i vještina (matematičko sadržajno znanje) na razini primjerenoj petnaestogodišnjim učenicima. Struktura i sadržaj testa trebaju biti usklađeni s konceptualnim okvirom, a važno je i postići odgovarajuću ravnotežu u zadacima kako bi se obuhvatile različite komponente konceptualnog okvira matematičke pismenosti.

Poželjna distribucija bodova prema matematičkom zaključivanju i procesima rješavanja problema

128. Matematički zadaci u istraživanju PISA 2021 mogu biti klasificirani ili kao matematičko zaključivanje ili kao jedan od triju matematičkih procesa vezanih uz rješavanje matematičkih problema. U razvoju testa cilj je postići ravnotežu kojom bi se osigurala podjednaka zastupljenost dvaju procesa koji se odnose na povezivanje stvarnog i matematičkog svijeta (formuliranje i tumačenje/vrednovanje) te matematičkog zaključivanja i primjene kod koje učenici rade na matematički formuliranom problemu. Iako se matematičko zaključivanje može promatrati unutar procesa formuliranja, tumačenja i primjenjivanja, zadaci će obuhvatiti samo jedno područje.

Tablica 1. Približna distribucija bodova po područjima u istraživanju PISA 2021

| | | Postotak bodova u istraživanju PISA 2021 |
|----------------------------------|---|--|
| Matematičko zaključivanje | | oko 25% |
| Rješavanje matematičkih problema | Matematičko formuliranje situacija | oko 25% |
| | Primjena matematičkih koncepata, činjenica, procedura i zaključivanja | oko 25% |
| | Tumačenje, primjenjivanje i vrednovanje matematičkih rezultata | oko 25% |
| UKUPNO | | 100 |

129. Važno je napomenuti da bi zadaci u svakoj od kategorija procesa trebali obuhvatiti širok raspon težine i matematičke zahtjevnosti. To je detaljnije opisano u tablici vezanoj uz matematičko zaključivanje i svaki od procesa rješavanja problema.

Poželjna distribucija bodova prema sadržajnim kategorijama

130. Matematički zadaci u PISA-i odabiru se kako bi odražavali matematičko sadržajno znanje ranije opisano u ovom konceptualnom okviru. Trend zadaci odabrani za istraživanje PISA 2021 podjednako će obuhvaćati četiri sadržajne kategorije kao što je prikazano u Tablici 2. U razvoju testa cilj je distribuirati zadatke prema sadržajnim kategorijama na način da se osigura što uravnoteženija distribucija bodova s obzirom na to da su sva navedena područja važna za konstruktivne, angažirane i promišljajuće građane.

Tablica 2. Približna distribucija bodova prema sadržajnim kategorijama u istraživanju PISA 2021

| Sadržajna kategorija | Postotak bodova u istraživanju PISA 2021 |
|-----------------------|--|
| Promjena i odnosi | oko 25% |
| Prostor i oblik | oko 25% |
| Količina | oko 25% |
| Neizvjesnost i podaci | oko 25% |
| UKUPNO | 100 |

131. Važno je napomenuti da bi zadaci u svakoj od sadržajnih kategorija trebali obuhvatiti širok raspon težine i matematičke zahtjevnosti.

Težina zadataka

132. Ispitivanje matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 obuhvaća zadatke različite težine koji odgovaraju različitim sposobnostima petnaestogodišnjih učenika. Ono uključuje teže matematičke zadatke za učenike s naprednijim sposobnostima, kao i zadatke primjerenije učenicima s najslabijim sposobnostima. Sa psihometrijskog stajališta, istraživanje kojim se želi ispitati određena kohorta najuspješnije je i najučinkovitije kad je težina zadataka usklađena sa sposobnošću ispitanika. Nadalje, opisane skale postignuća na temelju kojih se izvješćuju PISA rezultati mogu sadržavati korisne podatke o svim učenicima samo ako zadaci na temelju kojih se rade opisi obuhvaćaju čitav raspon sposobnosti.

133. U Tablici 3 opisani su različiti postupci koji se očekuju od učenika prilikom matematičkog zaključivanja i procesa rješavanja problema. Opisani su postupci koji će se u zadacima tražiti od učenika. Unutar svake od kategorija, određeni broj zadataka označen je zvjezdicama (**) kako bi se naznačili postupci koji se očekuju od učenika na razinama 1a, 1b i 1c te na razini 2 skale postignuća. Autori zadataka trebat će osigurati da bude zastupljen dovoljan broj zadataka na nižim razinama skale postignuća kako bi učenici koji se nalaze na tim razinama mogli pokazati što su sposobni činiti.

134. Da bi se dobile korisne informacije o novim najnižim razinama 1b i 1c, važno je da jezik i kontekst ne utječu na matematiku koja se ispituje. Zbog toga je potrebno pažljivo razmotriti i kontekst i jezik. Međutim, zadaci ipak trebaju biti zanimljivi kako učenici ne bi odustali od rješavanja zadataka zbog nedostatka interesa.

135. Zadaci na razinama 1b i 1c trebali bi obuhvatiti situacije s kojima se učenici susreću svakodnevno, kao što su primjerice novac, temperatura, hrana, vrijeme, datumi, težina, veličina i udaljenost. Svi zadaci trebaju biti konkretni, a ne apstraktni. U zadacima bi fokus trebao biti samo na matematiku. Razumijevanje konteksta ne bi smjelo utjecati na postignuće u zadacima.

136. Također, svi bi zadaci trebali biti što jednostavnije formulirani. Rečenice bi trebale biti kratke i izravne, a složene rečenice, složene imenice i kondicionalne rečenice trebale bi se izbjegavati. Vokabular korišten u zadacima treba biti pažljivo odabran kako bi učenici jasno razumjeli što se od njih traži. Uz to, posebna pažnja usmjerit će se na izbjegavanje dodatnog otežavanja zbog prevelike količine teksta koji je potrebno čitati ili konteksta koji je učenicima nepoznat zbog njihova kulturnog podrijetla.

U zadacima na razini 1c trebao bi se tražiti samo jedan korak ili operacija. No važno je napomenuti da jedan korak ili operacija nisu ograničeni na jedan aritmetički korak. Taj se korak može pokazati kroz odabir odgovora ili označavanje određenih informacija. U mjerenju matematičkih sposobnosti učenika na razinama 1b i 1c trebalo bi se koristiti i matematičko zaključivanje i procesi rješavanja problema.

Tablica 3. Očekivani postupci učenika za matematičko zaključivanje i svaki od procesa rješavanja problema⁹

| Zaključivanje | | |
|--|--|--|
| ** Izvesti jednostavan zaključak | | |
| ** Odabrati odgovarajuće obrazloženje | | |
| ** Objasniti zašto matematički rezultat ili zaključak ima ili nema smisla u određenom kontekstu problema | | |
| Prikazati problem na drugačiji način, uključujući njegovo organiziranje prema matematičkim konceptima te stvaranje odgovarajućih pretpostavki | | |
| Koristiti definicije, pravila i formalne sustave uz primjenu algoritama i računalnog razmišljanja | | |
| Objasniti i braniti osnovanost prepoznatog ili osmišljenog prikaza stvarne životne situacije | | |
| Objasniti ili braniti osnovanost procesa i procedura ili simulacija korištenih za dobivanje matematičkog rezultata ili rješenja | | |
| Prepoznati ograničenja modela za rješavanje problema | | |
| Razumjeti definicije, pravila i formalne sustave te primjenu algoritama i računalnog razmišljanja | | |
| Ponuditi obrazloženje za prepoznati ili osmišljeni prikaz situacije iz stvarnoga života | | |
| Ponuditi obrazloženje za procese i procedure korištene za dobivanje matematičkog rezultata ili rješenja | | |
| Promišljati o matematičkim argumentima objašnjavajući i obrazlažući matematički rezultat | | |
| Kritički procjenjivati ograničenja modela korištenog u rješavanju problema | | |
| Tumačiti matematički rezultat u stvarnom životnom kontekstu kako bi se objasnilo značenje rezultata | | |
| Objasniti odnose između kontekstualno specifičnog jezika problema te simboličkog i formalnog jezika potrebnog za njegovo matematičko prikazivanje | | |
| Promišljati o matematičkim argumentima objašnjavajući i obrazlažući matematički rezultat | | |
| Promišljati o matematičkim rješenjima te ponuditi objašnjenja i argumente koji potkrepljuju, pobijaju ili kvalificiraju matematičko rješenje za kontekstualizirani problem | | |
| Analizirati sličnosti i razlike između računalnog modela i matematičkog problema koji ga modelira | | |
| Objasniti na koji način funkcionira jednostavan algoritam te pronaći i ispraviti pogreške u algoritmima i programima | | |
| Formuliranje | Primjena | Tumačenje |
| ** Odabrati matematički opis ili prikaz koji opisuje problem | ** Izvršavati jednostavne računske radnje | **Tumačiti matematički rezultat u stvarnom životnom kontekstu |
| ** Utvrditi ključne varijable u modelu | ** Odabrati odgovarajuću strategiju s popisa | ** Utvrditi ima li ili nema matematički rezultat smisla s obzirom na kontekst problema |

⁹ Tablica 3 temeljena je na prikazu korištenom u prethodnim konceptualnim okvirima kako bi se povezali matematički procesi s matematičkim sposobnostima. Tablica sadrži sve primjere i objašnjenja iz tog prikaza.

| Formuliranje | Primjena | Tumačenje |
|---|--|--|
| ** Odabrati prikaz koji odgovara kontekstu problema | ** Primijeniti određenu strategiju kako bi se došlo do matematičkog rješenja | ** Prepoznati ograničenja modela korištenog u rješavanju problema |
| Čitati, dekodirati i razumjeti tvrdnje, pitanja, zadatke, objekte ili slike kako bi se stvorio model situacije | ** Izrađivati matematičke prikaze, grafikone, konstrukcije ili računalne kreacije | Koristiti matematičke alate ili računalne simulacije kako bi se provjerila osnovanost matematičkog rješenja, kao i sve prepreke ili ograničenja tog rješenja s obzirom na kontekst problema |
| Prepoznati matematičku strukturu (uključujući pravilnosti, odnose i uzorke) u problemima ili situacijama | Razumjeti i koristiti konstrukte na temelju definicija, pravila i formalnih sustava uključujući primjenu poznatih algoritama | Tumačiti matematičke rezultate u različitim oblicima s obzirom na situaciju ili namjenu; uspoređivati ili vrednovati dva ili više prikaza s obzirom na situaciju |
| Prepoznati i opisati matematičke aspekte problemske situacije iz stvarnoga života uključujući utvrđivanje značajnih varijabli | Izraditi matematičke prikaze, grafikone, konstrukcije ili računalne kreacije te iščitavati matematičke informacije iz njih | Koristiti znanje o tome kako stvarni svijet utječe na izračune i rezultate matematičkih postupaka ili modela kako bi se donijeli kontekstualni zaključci o tome kako bi se rezultati trebali prilagoditi ili primijeniti |
| Pojednostaviti ili raščlaniti situaciju ili problem kako bi bio podložan za matematičku analizu | Manipulirati brojevima, grafičkim i statističkim podacima i informacijama, algebarskim izrazima i jednadžbama te geometrijskim prikazima | Stvarati i iznositi objašnjenja i argumente u kontekstu problema |
| Prepoznati aspekte problema koji se podudaraju s poznatim problemima ili matematičkim konceptima, činjenicama ili procedurama | Artikulirati rješenje prikazujući i/ili sažimajući te predstavljajući matematičke međurezultate | Prepoznati (pokazati, protumačiti, objasniti) opseg i ograničenja matematičkih koncepta i matematičkih rješenja |
| Prevesti problem u standardni matematički prikaz ili algoritam | Koristiti matematičke alate uključujući tehnologiju, simulacije i računalno razmišljanje kako bi se došlo do točnih ili približnih rješenja | Razumjeti odnos između konteksta problema i prikaza matematičkog rješenja; oslanjati se na to razumijevanje u interpretaciji rješenja i procjenjivanju izvedivosti te mogućih ograničenja rješenja |
| Koristiti matematičke alate (odgovarajuće varijable, simbole, prikaze) kako bi se opisale matematičke strukture i/ili odnosi u problemu | Razumjeti, dovoditi u vezu i koristiti različite prikaze tijekom interakcije s problemom | |
| Koristiti matematičke alate i računalne alate za prikazivanje matematičkih odnosa | Mijenjati različite prikaze u procesu pronalaženja rješenja | |
| Prepoznati ograničenja i pojednostavljenja pretpostavki u matematičkom modelu | Koristiti postupak od više koraka koji dovodi do matematičkog rješenja, zaključka ili generalizacije | |
| | Oslanjati se na razumijevanje konteksta u usmjeravanju ili ubrzavanju procesa matematičkog rješavanja problema, npr. radeći s razinom točnosti koja odgovara kontekstu | |
| | Uopćavati na temelju rezultata primjene matematičkih postupaka u procesu pronalaženja rješenja | |

Ispitivanje matematičke pismenosti putem računala

138. Glavni način na koji će se matematička pismenost ispitivati u istraživanju PISA 2021 bit će test na računalu. Taj je prijelaz i očekivan s obzirom na to da su već i istraživanja 2015. i 2018. godine prešla na ispitivanje putem računala. Da bi se zadržali trendovi među ciklusima istraživanja, testovi korišteni 2015. i 2018. godine bili su „računalno neutralni“ usprkos tome što se ispitivanje provodilo na računalu. Prijelazom na potpuno ispitivanje matematičke pismenosti putem računala u istraživanju PISA 2021 otvara se niz novih mogućnosti za razvoj testa iz matematičke pismenosti kako bi s jedne strane bio bolje usklađen s promjenjivom prirodom matematike u današnjem svijetu, a s druge strane omogućavao praćenje trendova u odnosu na prethodne cikluse istraživanja. Nove mogućnosti uključuju nove formate zadataka (npr. „povuci i spusti“), prikazivanje podataka iz stvarnoga života (kao što su veliki skupovi podataka koje je moguće sortirati), stvaranje matematičkih modela ili simulacija koje učenici mogu proučavati mijenjajući vrijednosti varijabli te prilagođavanje krivulje i korištenje krivulje najboljeg uklapanja u predviđanju. Osim šireg opsega tipova zadataka i matematičkih mogućnosti, ispitivanje putem računala pruža mogućnost i adaptivnog ispitivanja.

139. Adaptivno ispitivanje u sklopu ispitivanja matematičke pismenosti, koje je već ranije korišteno u PISA-inom ispitivanju čitalačke pismenosti, omogućava bolje opisivanje sposobnosti učenika koji se nalaze na oba kraja raspona postignuća. Individualizirane kombinacije ispitnih cjelina rastuće težine koje se učenicima prikazuju na temelju njihovih odgovora i bodova koje su ostvarili u početnim ispitnim cjelinama omogućuje prikupljanje detaljnijih informacija o karakteristikama postignuća učenika na oba kraja skale postignuća.

140. Poboljšanja koja nudi računalna tehnologija dovode do razvoja zadataka koji su učenicima zanimljiviji, vizualno privlačniji i lakši za razumijevanje. Na primjer, učenicima može biti predstavljen polazni sadržaj u pokretu, prikazi trodimenzionalnih objekata koje je moguće rotirati ili fleksibilniji pristup relevantnim informacijama. Svrha novih formata zadataka poput zadataka u kojima učenici trebaju „povući i spustiti“ podatke ili koristiti „vruće točke“ jest zainteresirati učenike, dopustiti širi raspon tipova odgovora te dobiti potpuniju sliku matematičke pismenosti. Jedan od glavnih izazova jest osigurati da se takvim zadacima i dalje ispituje *matematičku pismenost* te da utjecaj dimenzija koje nisu relevantne za ovu domenu budu svedena na minimum.

141. Istraživanja pokazuju da se zbog prisutnosti elektronične tehnologije na radnom mjestu povećavaju potrebe za matematičkim vještinama te da dolazi do međusobnog stapanja matematičke pismenosti i uporabe računala (Hoyles i sur., 2002). Za zaposlenike na svim razinama zaposlenja sada postoji međuovisnost između matematičke pismenosti i korištenja računalne tehnologije. Jedan od glavnih izazova jest razlikovati matematičku zahtjevnost u PISA-inim zadacima na računalu od zahtjevnosti koja nije povezana s matematičkim sposobnostima poput vještina u području informacijsko-komunikacijske tehnologije (IKT) te formata prikazivanja. Rješavanjem zadataka na računalu umjesto na papiru PISA se okreće ka stvarnosti i zahtjevima 21. stoljeća.

142. Zadaci koji se čine prikladnima za ispitivanje putem računala i promjenjiva priroda matematičke pismenosti uključuju:

- simulacije u kojima je postavljen matematički model, a učenici mogu mijenjati vrijednosti varijabli u svrhu istraživanja učinka varijabli kako bi došli do „optimalnog rješenja“
- prilagođavanje krivulje (odabirom krivulje iz ponuđenog ograničenog skupa krivulji) skupu podataka ili geometrijskom prikazu kako bi se utvrdila „najbolja krivulja“ te korištenje dobivene najbolje krivulje kako bi se ponudio odgovor na pitanje o situaciji
- situacije budžetiranja (npr. internetska trgovina) u kojima učenik treba odabrati kombinacije proizvoda kako bi postigao niz ciljeva unutar zadanog proračuna

- simulacije kupnje u kojima učenik odabire jednu od više različitih mogućnosti otplate kredita kako bi kupio neki proizvod na kredit u skladu s proračunom. Svrha problema jest razumjeti kako varijable međusobno djeluju jedna na drugu.
- problemi koji uključuju vizualno kodiranje kako bi se postigao zadani slijed radnji.

143. Bez obzira na (gore opisane) mogućnosti koje pruža ispitivanje putem računala, važno je da ispitivanje matematičke pismenosti putem računala ostane fokusirano na matematičku pismenost i da se fokus ne pomakne na ispitivanje IKT vještina. Jednako tako, važno je da simulacije i ostala navedena pitanja ne postanu dominantni i ne dovedu do gubitka matematičkog zaključivanja i procesa rješavanja problema.

144. Ispitivanje matematičke pismenosti putem računala treba zadržati i neka obilježja tiskanih testova, primjerice mogućnost vraćanja na zadatke koje su učenici već pokušali riješiti – iako će u kontekstu adaptivnog ispitivanja vraćanje trebati biti ograničeno na ispitnu cjelinu koju učenik trenutno rješava.

Dizajn matematičkih zadataka u istraživanju PISA 2021

145. U ispitivanju matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 koriste se tri tipa zadataka: zadaci otvorenog tipa, zadaci s kratkim odgovorom te zadaci odabira odgovora (višestrukog izbora).

- Zadaci otvorenog tipa traže od učenika nešto dulji pisani odgovor. Takvi zadaci od učenika mogu također tražiti da pokaže postupak izračunavanja ili objasni kako je došao do odgovora. Odgovore učenika na takve zadatke trebaju ručno bodovati stručnjaci. Da bi se olakšalo adaptivno ispitivanje, potrebno je maksimalno smanjiti broj zadataka u kojima odgovore učenika trebaju bodovati osposobljeni stručnjaci.
- Zadaci s kratkim odgovorom pružaju strukturiranije okruženje za predstavljanje rješenja problema i nude odgovore učenika za koje se može lako procijeniti jesu li točni ili netočni. Odgovori učenika na zadatke ovakvog tipa često se mogu automatski bodovati. Najčešće korišteni zadaci s kratkim odgovorom su zadaci u kojima se treba upisati samo jedan broj.
- Zadaci odabira odgovora zahtijevaju odabir jednog ili više odgovora iz skupine ponuđenih odgovora. U takvim se zadacima odgovori obično mogu automatski bodovati. U razvoju testova koristi se otprilike podjednak broj svakih od navedenih tipova zadataka.

146. PISA-in test matematičke pismenosti sastoji se od ispitnih *celina* koje sadrže pisane polazne tekstove ili druge informacije poput tablica, prikaza, grafikona ili dijagrama, iza kojih slijedi jedan ili više zadataka povezanih s tim zajedničkim polaznim sadržajima. Takav format omogućuje učenicima da se bolje udube u kontekst ili problem prilikom odgovaranja na niz međusobno povezanih zadataka.

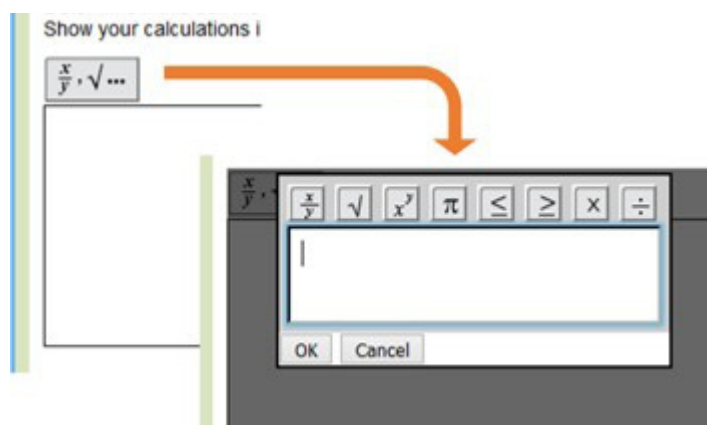
147. Zadaci odabrani za korištenje u PISA istraživanju različite su težine kako bi se obuhvatio širok raspon sposobnosti učenika koji sudjeluju u istraživanju. Uz to, testom su što je više moguće obuhvaćene sve glavne kategorije (kategorije sadržaja, procesi matematičkog zaključivanja i procesi rješavanja problema te različite kategorije konteksta i vještina 21. stoljeća) sa širokim rasponom težine zadataka. Težina zadataka utvrđuje se kao jedno od mjernih svojstava u probnom ispitivanju prije odabira zadataka za glavno PISA istraživanje. Odabir zadataka za PISA-in test u glavnom istraživanju radi se na temelju njihove prikladnosti s obzirom na kategorije iz konceptualnog okvira i njihova mjerna svojstva.

148. Također, u razvoju i odabiru zadataka vrlo se pažljivo razmatra i količina sadržaja koju je potrebno pročitati za uspješno rješavanje zadataka. U razvoju zadataka cilj je koristiti što jednostavnije i izravnije formulacije. Posebno se pazi na to da se u zadacima izbjegnu konteksti koji bi stvorili kultur-

ne predrasude, zbog čega sve odabrane zadatke procjenjuju zemlje sudionice. Prevođenje zadataka na velik broj jezika radi se pažljivo, uz ponovno prevođenje prevedenih sadržaja natrag na izvorni jezik i druge protokole.

149. PISA 2021 koristit će alat uz pomoć kojega će učenici moći upisivati svoje odgovore i prikazivati postupke izračunavanja, kao što matematička pismenost i zahtijeva. Učenici će moći unositi tekst i brojeve uz pomoć alata za uređivanje. Klikom na odgovarajuće gumbе učenici će moći unositi razlomke, korijene ili eksponente. Bit će dostupni i drugi simboli poput π i simbola za veće/manje, kao i simboli za množenje i dijeljenje. Primjer alata za uređivanje prikazan je u donjem Prikazu 3.

Prikaz 3. Primjer alata za uređivanje u istraživanju PISA 2021



150. Očekuje se da će paket alata dostupnih učenicima uključivati i osnovni znanstveni kalkulator koji će sadržavati operatore zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja te kvadratni korijen, pi, zagrade, eksponent, kvadrat, razlomke (y/x), inverzne funkcije ($1/x$), a kalkulator će biti programiran da slijedi standardni redoslijed računskih operacija.

151. Učenici koji rješavaju test na papiru moći će koristiti ručni kalkulator kakav koriste petnaestogodišnji učenici u školama.

Bodovanje zadataka

152. Iako se većina zadataka boduje dihotomno (odnosno odgovori ili dobivaju bodove ili ih ne dobivaju), u zadacima otvorenog tipa ponekad se dodjeljuje i djelomičan broj bodova, što omogućuje dodjeljivanje bodova prema različitim stupnjevima „točnosti“ odgovora ili stupnju do kojeg je učenik pokušao ili nije pokušao riješiti zadatak. Očekuje se da će djelomično bodovanje biti potrebno u zadacima matematičkog zaključivanja koji rijetko uključuju navođenje samo jednog broja, a češće odgovore s jednim ili više elemenata.

Izveščivanje o postignućima u matematici

153. Rezultati ispitivanja matematičke pismenosti u PISA-i izvješćuju se na više načina. Za svaku zemlju sudionicu dobiva se procjena ukupnog postignuća u matematici uzorkovanih učenika te se definira određeni broj razina postignuća. Daju se i opisi razina postignuća za učenike na svakoj od razina. Za potrebe istraživanja PISA 2021 ukupna skala postignuća u matematici sa šest razina korištena u prethodnim PISA ciklusima proširit će se na sljedeći način: razina 1 postat će razina 1a, a tablica s opisima razina postignuća bit će proširena kako bi uključivala i razinu 1b i razinu 1c. Ove su

nove razine dodane kako bi se omogućila veća granularnost u izvješćivanju o sposobnosti učenika koji se nalaze na donjem kraju skale postignuća.

154. Osim ukupne skale postignuća u matematici, nakon probnog istraživanja bit će razvijene i dodatne skale postignuća koje će biti korištene u izvješćivanju. Ove dodatne skale odnose se na matematičko zaključivanje i tri procesa rješavanja matematičkih problema: *matematičko formuliranje situacija; primjena matematičkih koncepata, činjenica, procedura i zaključivanja; te tumačenje, primjenjivanje i vrednovanje matematičkih rješenja.*

Matematička pismenost i popratni upitnici

155. Još od prvog ciklusa istraživanja, PISA-ini kontekstualni upitnici za učenike i škole korišteni su u dvije međusobno povezane svrhe koje doprinose širem cilju vrednovanja obrazovnih sustava: prvo, upitnici nude kontekst kroz koji se mogu tumačiti PISA rezultati i unutar obrazovnih sustava i između njih. Drugo, cilj upitnika jest dobiti pouzdane i valjane mjere dodatnih obrazovnih pokazatelja na temelju kojih je moguće donositi informirane odluke u oblikovanju obrazovnih politika i istraživanja.

156. S obzirom na to da je matematička pismenost glavno ispitno područje u istraživanju PISA 2021, popratnim upitnicima ne bi se trebali samo prikupljati podaci o trendovima za konstrukte koji se nastavljaju ispitivati, već i dodatno prikupljati detaljnije informacije o inovacijama u konceptualnom okviru matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021. Konkretno, očekuje se da će matematička pismenost biti u glavnom fokusu analiza predmetno-specifičnih kontekstualnih konstrukata, kao i različitih kategorija s političkim fokusom, od varijabli na individualnoj razini poput demografskih podataka i socijalnih i emocionalnih karakteristika do školskih praksi, politika i infrastrukture (OECD, 2018).

157. Kao potencijalno zanimljiv dodatak ispitivanju matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 identificirana su dva široka aspekta stavova prema matematici koji učenike potiču na produktivni angažman u matematici: interes učenika za matematiku te njihova spremnost na korištenje matematike. Očekuje se da će ova dva aspekta biti fokus upitnika u istraživanju 2021. godine.

158. Interes za matematiku obuhvaća komponente vezane uz sadašnju i buduću aktivnost. Relevantna pitanja odnose se na interes učenika za matematiku u školi, na to smatraju li je korisnom i u stvarnom životu, kao i na njihovu namjeru da nastave studirati matematiku i opredijele se za zanimanja temeljena na matematici. Ovo je područje od velike važnosti za međunarodni kontekst jer se mnoge zemlje sudionice suočavaju s padom postotka učenika koji se opredjeljuju za buduće studije vezane uz matematiku, a potrebe za diplomiranim stručnjacima u tim područjima istovremeno rastu.

159. Spremnost učenika na korištenje matematike odnosi se na stavove, emocije i uvjerenja o sebi koji učenicima omogućuju da se služe ili ih sprečavaju da se služe svojom matematičkom pismenošću. Učenici koji uživaju u matematičkim aktivnostima i osjećaju samopouzdanje prilikom takvih aktivnosti češće će koristiti matematiku u promišljanju o situacijama s kojima se susreću u različitim aspektima svoga života u školi i izvan nje. Konstrukti relevantni za ovo područje u PISA istraživanju obuhvaćaju osjećaj užitka, samopouzdanja i (nedostatka) matematičke anksioznosti te uvjerenja vezana uz samopoimanje i samoučinkovitost. Analiza uspjeha mladih Australaca nakon lošeg rezultata koji su ostvarili u PISA-i u dobi od petnaest godina pokazala je „da oni koji prepoznaju vrijednost matematike za njihov budući uspjeh imaju veću vjerojatnost da će ga i postići, a to uključuje osjećaj zadovoljstva u mnogim aspektima osobnog života, kao i njihovu budućnost i karijeru“ (Hillman i Thomson, 2010, str. 31). Ova studija ukazuje na to da usmjerenost na praktičnu primjenu matematike u svakodnevnom životu može pomoći u poboljšanju perspektiva za učenike sa slabijim postignućima.

160. Inovacije vidljive u matematičkom konceptualnom okviru u istraživanju PISA 2021 upućuju na najmanje četiri područja za koja bi se popratnim upitnicima mogli prikupiti bogati podaci: **matematič-**

ko zaključivanje; računalno razmišljanje i uloga tehnologije u korištenju i poučavanju matematike; četiri glavna sadržajna područja; te **vještine 21. stoljeća u kontekstu matematike**.

Matematičko zaključivanje

161. Matematički konceptualni okvir u istraživanju PISA 2021 u prvi plan stavlja matematičko zaključivanje temeljeno na ključnom razumijevanju koje se razvija kroz školsku matematiku (razumijevanje količine, brojevni sustava i njihovih algebarskih svojstava; prepoznavanje moći apstrakcije i simboličkog prikazivanja; uočavanje matematičkih struktura i njihovih pravilnosti; prepoznavanje funkcionalnih odnosa između količina; korištenje matematičkog modeliranja kao pogleda na stvarni svijet; te razumijevanje varijacija kao središta statistike).

162. Naglasak na zaključivanju ima implikacije za popratne upitnike koji bi trebali osigurati mjere za razumijevanje prilika koje učenici imaju za učenje matematičkog zaključivanja i primjenu ključnog razumijevanja koje se razvija kroz školsku matematiku. Konkretno, upitnici bi trebali utvrditi, na primjer, koliko često učenici:

- identificiraju, prepoznaju, organiziraju, povezuju i prikazuju;
- konstruiraju, apstrahiraju, vrednuju, zaključuju, opravdavaju, objašnjavaju i brane te
- tumače, prosuđuju, kritiziraju, osporavaju i kvalificiraju.

163. Osim utvrđivanja učestalosti prilika za (učenje) zaključivanje, upitnicima bi se trebalo istražiti i u kojim su oblicima takve prilike dostupne (verbalnim ili pisanim).

164. Konačno, vezano za zaključivanje, upitnicima bi se trebale prikupljati informacije i o spremnosti učenika da budu ustrajni u zadacima koji uključuju zaključivanje.

165. Kad je riječ o nastavnicima i poučavanju, postoji potreba za boljim razumijevanjem načina na koji nastavnici vide ulogu zaključivanja u matematici općenito, a posebno u svom poučavanju i vrednovanju.

Računalno razmišljanje

166. Aspekti računalnog razmišljanja čine dimenziju matematike i matematičke pismenosti koja se brzo razvija i raste. Konceptualni okvir matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 opisuje način na koji računalno razmišljanje čini dio matematike i utječe na korištenje matematike. Modulima *vrijednosti i uvjerenja o učenju* i *otvorenosti uma* u popratnim upitnicima mogu se istražiti iskustva učenika o ulozi računalnog razmišljanja u korištenju matematike.

167. Konceptualni okvir matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 usmjeren je na različite načine na koje tehnologija mijenja svijet u kojem živimo i značenje matematike. Ključna pitanja za popratne upitnike odnose se na razvoj dubokog razumijevanja prvo o tome kako se mijenjaju iskustva učenika s matematikom i u korištenju matematike (ako se uopće mijenjaju) i drugo, o tome kako se mijenjaju pedagoški pristupi u poučavanju zbog utjecaja tehnologije na korištenje matematike i matematičkih artefakata te na to što sve podrazumijeva korištenje matematike. Što se tiče učenika, postoji interes da se stekne bolji uvid u to kako tehnologija utječe na postignuće učenika, što bi se moglo istražiti putem modula *izvršavanja zadataka* u konceptualnom okviru upitnika. Pedagoški pristupi mogli bi se istražiti putem modula *vrijeme učenja i kurikulum te nastavna praksa*.

168. Naglasak na računalnom razmišljanju i ulozi tehnologije u korištenju i poučavanju matematike ima implikacije za popratne upitnike koji bi trebali osigurati mjere za bolje razumijevanje prilika koju učenici imaju za učenje u tom pogledu. Konkretno, upitnicima bi se trebala utvrditi učestalost kojom učenici, primjerice:

- dizajniraju ili koriste računalne simulacije ili modele
- kodiraju ili programiraju u nastavi matematike i izvan nje
- su izloženi računalnim matematički sustavima (CSM) (uključujući softveru dinamične geometrije, proračunskim tablicama, softveru za programiranje (npr. Logo i Scratch), grafičkim kalkulatorima, igrama itd.).

Četiri ključna sadržajna područja

169. Prepoznajući promjenjivu prirodu svijeta konceptualni okvir matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 ukazuje na to da posebnu pažnju u sadržajnom okviru dobivaju sljedeća četiri sadržajna područja: fenomen rasta (unutar kategorije „promjena i odnosi“); geometrijska aproksimacija (unutar kategorije „prostor i oblik“); računalne simulacije (unutar kategorije „količina“); te uvjetno odlučivanje (unutar kategorije „neizvjesnost i podaci“). Naglasak na ovim područjima ima implikacije za popratne upitnike koji bi trebali pružiti mjere za bolje razumijevanje prilika koje učenici imaju za učenje u tom pogledu. Konkretno, upitnicima bi se trebala utvrditi učestalost kojom su učenici izloženi takvim sadržajima kao i različiti oblici takvih prilika.

Vještine 21. stoljeća u kontekstu matematike

170. Konceptualni okvir matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 uključuje određeni skup vještina 21. stoljeća i kao ishode i kao fokus matematike. Popratnim upitnicima moglo bi se istraživati doprinosi li matematika razvoju tih vještina te je li na njih stavljen naglasak u nastavnoj praksi. Konkretno, modulom *vrijeme učenja i kurikul* moglo bi se istražiti jesu li takve vještine obuhvaćene propisanim kurikulumom.

171. Rezultati istraživanja PISA 2021 pružit će važne informacije za donositelje obrazovnih politika u zemaljama sudionicama o ishodima učenja vezanim uz postignuća i stavove. Povezivanjem podataka iz ispitivanja matematičke pismenosti i podataka iz istraživanja o stavovima, emocijama i uvjerenjima koji potiču učenike na korištenje matematičke pismenosti, kao i o utjecaju četiriju gore opisanih aspekata, dobit će se potpunija slika.

SAŽETAK

172. Konceptualni okvir matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2021 usklađen je s prethodnim konceptualnim okvirima, no prepoznaje da se svijet neprestano mijenja, a s tim i potreba da matematički pismeni građani budu sposobni matematički zaključivati, a ne samo rutinski reproducirati matematičke postupke.

173. U području matematičke pismenosti cilj PISA-e jest razviti pokazatelje koji ukazuju na to koliko učinkovito zemlje pripremaju učenike za korištenje matematike u svakodnevnim aspektima njihova privatnog, građanskog i profesionalnoga života kao konstruktivni, angažirani i promišljajući građani 21. stoljeća. U tu svrhu PISA je razvila definiciju matematičke pismenosti i konceptualni okvir koji odražava važne komponente ove definicije.

174. Matematički zadaci odabrani za istraživanje PISA 2021, temeljeni na navedenoj definiciji i konceptualnom okviru, trebali bi odražavati ravnotežu između matematičkog zaključivanja, procesa rješavanja problema te matematičkih sadržaja i konteksta.

175. Dizajn ispitivanja osigurat će valjano mjerenje sposobnosti za čitav raspon postignuća proširivanjem skale postignuća za dvije razine ispod najniže razine na dosadašnjoj PISA-inoj skali, uz istovremeno zadržavanje kvalitete i sadržaja ispitivanja.

176. Ispitivanje matematičke pismenosti koje će se provoditi na računalu od 2021. godine predstavljat će matematičke probleme u različitim oblicima zadataka s različitim stupnjem integriranih smjernica i strukture te nizom različitih formata zadržavajući naglasak na autentičnim problemima koji traže od učenika da zaključuju i pokažu svoje razmišljanje.

LITERATURA

- Ananiadou, K. and M. Claro (2009), „21st Century Skills and Competences for New Millennium Learners in OECD Countries“, *OECD Education Working Papers*, No. 41, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/218525261154>.
- Basu, S. et al. (2016), „Identifying middle school students' challenges in computational thinking-based science learning“, *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, Vol. 11/3, <http://dx.doi.org/10.1186/s41039-016-0036-2>.
- Beheshti, E. i sur. (2017), *Computational Thinking in Practice: How STEM Professionals Use CT in Their Work*, Northwestern University, San Antonio, Texas, <http://ccl.northwestern.edu/papers.shtml>.
- Beloit College (2017), *The Beloit College Mindset List for the Class of 2021*, <https://www.beloit.edu/mindset/2021/>.
- Benton, L. i sur. (2017), „Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England“, *Digital Experiences in Mathematics Education*, Vol. 3, str. 115-138, <http://dx.doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x>.
- Box, G. and N. Draper (1987), *Empirical Model-Building and Response Surfaces*, John Wiley.
- Brennan, K. and M. Resnick (2012), *New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking*, https://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf.
- Devlin, K. (1994), *Mathematics: The Science of Patterns : The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*, W H Freeman & Co.
- Fadel, C., M. Bialik i B. Trilling (2015), *Four-Dimensional Education : The Competencies Learners Need to Succeed*, CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Gadanidis, G. (2015), *Coding for Young Mathematicians*, Western University, London, Ontario, Canada, <http://worlddiscoveries.ca/technology/18155> (preuzeto 5. 4. 2018).
- Gadanidis, G., E. Clements i C. Yiu (2018), „Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians“, *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 20/1, str. 32-53, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403542>.
- Galbraith, P., H. Henn and M. Niss (ur.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, Springer US, <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>.
- Grover, S. (2018), *The 5th 'C' of 21st Century Skills? Try Computational Thinking (Not Coding) | EdSurge News*, <https://www.edsurge.com/news/2018-02-25-the-5th-c-of-21st-century-skills-try-computational-thinking-not-coding> (preuzeto 5. 4. 2018).
- Hillman, K. i S. Thomson (2010), *Against the odds: influences on the post-school success of 'low performers'.*, NCVER, Adelaide, Australia, <https://www.ncver.edu.au/publications/publications/all-publications/against-the-odds-influences-on-the-post-school-success-of-low-performers#> (accessed on 5 April 2018).
- Hoyles, C. i sur. (2002), „Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council“, *Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London. (2002)*, <http://discovery.ucl.ac.uk/1515581/> (preuzeto 5. 4. 2018).
- Mahajan, S. i sur. (2016), *PISA Mathematics in 2021*, Center for Curriculum Redesign, <http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf>.
- Moore, D. (1997), „New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics“, *International Statistical Review*, Vol. 65/2, str. 123-165, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00390.x>.
- National Research Council (2012), *Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century*, The National Academies Press, Washington D.C., https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse_070895.pdf (preuzeto 5. 4. 2018).
- Niemelä, P. i sur. (2017), *Computational thinking as an emergent learning trajectory of mathematics*, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/3141880.3141885>.
- OECD (2018), *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science*.
- OECD (2017), *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>.
- OECD (2017), *PISA for Development Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science, Preliminary Version*, OECD Publishing, Paris, <http://www.oecd.org/about/publishing/corrigenda.htm>. (preuzeto 6. 4. 2018).
- OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>.

- OECD (2005), *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*, OECD, Paris, <http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf> (preuzeto 5. 4. 2018).
- OECD (2004), *The PISA 2003 Assessment Framework*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264101739-en>.
- Pei, C., D. Weintrop and U. Wilensky (2018), „Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land“, *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 20/1, str. 75-89, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403543>.
- Pratt, D. i R. Noss (2002), „The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness“, *Journal of the Learning Sciences*, Vol. 11/4, str. 453-488, http://dx.doi.org/10.1207/S15327809JLS1104_2.
- Rambally, G. (2017), *Applications of Computational Matrix Algebra*, AACE, Austin, Texas, <https://www.learntechlib.org/p/177277/>.
- Reimers, F. and C. Chung (2016), *Teaching and Learning for the Twenty-First Century : Educational Goals, Policies, and Curricula from Six Nations*, Harvard Education Press, Cambridge, MA.
- Resnick, M. et al. (2009), „Scratch: Programming for all“, *Communications of the ACM*, Vol. 52/11, str. 60, <http://dx.doi.org/10.1145/1592761.1592779>.
- Steen, L. (1990), *On the Shoulders of Giants*, National Academies Press, Washington, D.C., <http://dx.doi.org/10.17226/1532>.
- Watson, J. i R. Callingham (2003), „Statistical literacy: A Complex hierarchical construct“, *Statistics Education Research Journal*, Vol. 2, str. 3-46.
- Weintrop, D. i sur. (2016), „Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms“, *Journal of Science Education and Technology*, Vol. 25/1, str. 127-147, <http://dx.doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5>.
- Weintrop, D. i U. Wilensky (2015), *To block or not to block, that is the question*, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/2771839.2771860>.